UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s4nouvellesannal07pari

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

ΔΕΙΟ ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,
Docteur ès Sciences,
Professeur au lycée Saint-Louis.

R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État,
Répétiteur et examinateur d'admission
à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI ET DUPORCQ.

QUATRIÈME SÉRIE.
TOME VII.
(LXVIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

99347
3/11/09

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1907
(Tous droits réservés.)

QA
1
N8
v.66

NOUVELLES ANNALES

DE

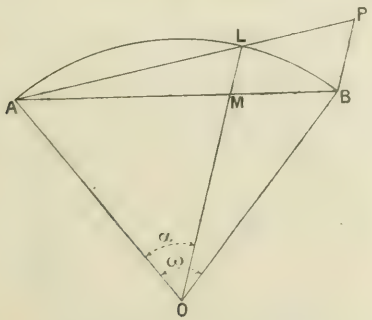
MATHÉMATIQUES.

[K21d]

SUR LA RECTIFICATION APPROCHÉE DES ARCS DE CERCLE;

PAR M. D'OCAGNE.

Soit, dans un cercle de rayon 1, ALB un arc égal à ω. Sur la corde AB de cet arc prenons le point M tel que $\frac{AM}{AB} = m$ et tirons le rayon OML. Nous allons com-



parer la longueur AL de la corde ainsi déterminée dans le cercle à la longueur ω de l'arc AB. Appelant α l'angle AOM, et posant $\sin\frac{\alpha}{2} = \theta$, on a

$$AL = 2\theta.$$

Or, le triangle isoscèle OAB donne

$$\frac{\sin\alpha}{\mathrm{AM}} = \frac{\sin(\omega-\alpha)}{\mathrm{MB}},$$

ou

$$\frac{\sin\alpha}{m} = \frac{\sin(\omega-\alpha)}{1-m},$$

c'est-à-dire, en posant $\frac{1-m}{m} = p$,

$$\sin(\omega-\alpha) = p\sin\alpha.$$

Faisant usage du développement bien connu

$$x = \sin x + \frac{\sin^3 x}{6} + \frac{3\sin^5 x}{40} + \ldots$$
$$+ \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\,\frac{\sin^{2n+1}x}{2n+1} + \ldots,$$

on tire de là

$$\omega - \alpha = p\sin\alpha + \frac{p^3\sin^3\alpha}{6} + \frac{3p^5\sin^5\alpha}{40} + \ldots.$$

Or,

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\theta(1-\theta^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On peut donc écrire

$$\omega - \alpha = 2p\theta(1-\theta^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{8p^3}{6}\theta^3(1-\theta^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{96p^5}{40}\theta^5(1-\theta^2)^{\frac{5}{2}} + \ldots$$
$$= 2p\theta\left(1 - \frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^4}{8} - \ldots\right) + \frac{4p^3}{3}\theta^3\left(1 - \frac{3}{2}\theta^2 + \ldots\right)$$
$$+ \frac{12p^5}{5}\theta^5(1 - \ldots) + \ldots$$
$$= 2p\theta + \left(\frac{4p^3}{3} - p\right)\theta^3 + \left(\frac{12p^5}{5} - 2p^3 - \frac{p}{4}\right)\theta^5 + \ldots.$$

D'autre part, si l'on écrit $\alpha = 2\frac{\alpha}{2}$ et qu'on applique à $\frac{\alpha}{2}$ le développement ci-dessus rappelé, on a

$$\alpha = 2\theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{3\theta^5}{20} + \ldots.$$

Par addition des deux derniers développements obtenus, il vient

$$\omega = 2(p-1)\theta + \frac{1}{3}(4p^3 - 3p - 1)\theta^3$$
$$+ \frac{1}{20}(48p^5 - 40p^3 - 5p + 3)\theta^5 + \ldots$$

ou, en remplaçant p par $\frac{1-m}{m}$, et multipliant les deux membres par m,

$$m\omega = 2\theta + \frac{9m^2 - 12m - 4}{3m^2}\theta^3$$
$$+ \frac{115m^4 - 360m^3 + 440m^2 - 240m + 48}{20m^5}\theta^5 + \ldots$$

d'où, en se rappelant que $AL = 2\theta$ et posant

$$\delta = 2\theta - m\omega,$$

$$\delta = -\frac{9m^2 - 12m + 4}{3m^2}\theta^3$$
$$- \frac{115m^4 - 360m^3 + 440m^2 - 240m + 48}{20m^5}\theta^5 + \ldots$$

Ainsi, par rapport à θ qui tend vers o en même temps que ω (et même plus rapidement, de façon sensible), la différence δ est généralement du troisième ordre. Mais il suffit de remarquer que

$$9m^2 - 12m + 4 = (3m - 2)^2,$$

pour en conclure que, si l'on prend

$$m = \frac{2}{3},$$

la différence δ n'est plus que du cinquième ordre en θ.

Si, d'ailleurs, on effectue la division par $3m - 2$ du polynome qui figure en numérateur dans le coefficient de θ^5, on trouve pour reste $-\frac{32}{81}$. La substitution de la valeur $\frac{2}{3}$ à m, dans le coefficient de θ^5, a donc pour ré-

sultat

$$-\frac{-\frac{32}{81}}{20\frac{16}{81}} = \frac{1}{10}$$

et, par suite, pour $m = \frac{2}{3}$,

$$\delta = \frac{\theta^5}{10} + \ldots$$

Ceci montre que *si l'on mène le rayon* OL *passant aux* $\frac{2}{3}$ *de la corde* AB *à partir du point* A, *la corde* AL *ainsi déterminée dans le cercle est approximativement égale aux* $\frac{2}{3}$ *de l'arc* AB.

Il suffit, par conséquent, de *tirer la parallèle* BP *à* OL *pour avoir approximativement en* AP *la longueur de l'arc* AB.

Remarquons d'ailleurs qu'il est facile de tracer la droite ML, même si le centre O du cercle est inaccessible. Cette droite est, en effet, perpendiculaire au milieu de la corde commune au cercle donné et à tout cercle ayant le point M comme centre, celui par exemple qui a MB pour rayon.

Inversement, cette construction permet de porter sur le cercle, à partir de A, un arc de longueur l donnée. Il suffit, ayant tracé la corde AL de longueur $\frac{2l}{3}$ et l'ayant prolongée en P tel que $AP = l$, de mener PB parallèlement au rayon aboutissant en L.

En particulier, on pourra reporter sur l'arc AB la longueur de la corde AL, égale à ses deux tiers, ce qui, au degré d'approximation que comporte cette construction, fournit un moyen d'opérer la trisection de l'angle.

Pour nous rendre compte du degré d'approximation que comporte ce tracé, nous avons calculé l'erreur re-

lative

$$\varepsilon = \frac{AP - \text{arc}\,AB}{\text{arc}\,AB}$$

pour les diverses valeurs de l'arc AB croissant de 10° en 10° (¹) dans un quart de circonférence. Ce calcul est facile à faire. On a, en effet,

$$AP = \frac{3}{2}\,AL = 3 \sin \frac{\alpha}{2},$$

l'angle α étant lié à ω par

$$\sin(\omega - \alpha) = \frac{1}{2} \sin \alpha$$

ou

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{\sin \omega}{\cos \omega - \frac{1}{2}} = \frac{\sin \omega}{2 \cos \frac{\omega + 60}{2} \cos \frac{\omega - 60}{2}}.$$

Nous avons ainsi obtenu les valeurs suivantes :

ω.	ε.
10°	0,000 01
20	0,000 01
30	0,000 05
40	0,000 11
50	0,000 38
60	0,000 82
70	0,001 30
80	0,002 51
90	0,005 34

Ainsi, jusqu'aux environs de $\omega = 70°$, l'erreur relative reste inférieure à 0,001, c'est-à-dire au-dessous de ce que, dans la pratique du calcul graphique, on peut tenir pour négligeable.

Il est facile d'ailleurs, par des bissections successives,

(¹) La présence du terme $\frac{1}{2}$, égal à cos60°, au dénominateur de tang α, rend le calcul plus simple avec les degrés qu'avec les grades.

de rendre toujours la valeur angulaire de l'arc à rectifier inférieure à celle que comporte le degré d'approximation relative qu'on veut obtenir.

[M²4m]

SUR DEUX SURFACES DU QUATRIÈME ORDRE LIÉES A L'OCTUPLE GAUCHE COMPLET;

PAR M. L. REMY.

Cette Note a pour objet l'étude géométrique de deux surfaces du quatrième ordre que nous avons définies précédemment (¹) au moyen des fonctions thêta à deux variables, et qui se trouvent liées à la configuration de l'espace à laquelle M. Fontené a donné le nom d'octuple gauche complet (²).

Il convient de rappeler la définition de l'octuple gauche complet : c'est la figure de l'espace formée par quatre couples de points :

$$(1, 1'), \quad (2, 2'), \quad (3, 3'), \quad (4, 4'),$$

tels que le plan déterminé par trois points pris dans les trois premiers couples passe par l'un des points du quatrième couple.

Ces plans sont au nombre de huit, répartis également en quatre couples :

$$P_1 : (4, 1, 2', 3'), \quad P'_1 : (4', 1', 2, 3),$$
$$P_2 : (4, 2, 3', 1'), \quad P'_2 : (4', 2', 3, 1),$$
$$P_3 : (4, 3, 1', 2'), \quad P'_3 : (4', 3', 1, 2),$$
$$P_4 : (1, 2, 3, 4), \quad P'_4 : (1', 2', 3', 4'),$$

(¹) *Comptes rendus*, 26 mars et 19 novembre 1906.

(²) *Bulletin de la Société mathémathique*, t. XXXIV, nos I et III.

et, corrélativement, ces quatre couples de plans sont tels que le point commun à trois plans pris dans les trois premiers couples appartient à un plan du quatrième couple.

I.

Il nous sera utile de résoudre tout d'abord le problème suivant :

Quel est le lieu des sommets des cônes du second ordre circonscrits à un octuple gauche complet ?

Le lieu des sommets des cônes appartenant à un réseau ponctuel de quadriques est en général une courbe du sixième degré. Dans le cas actuel, il comprend les quatre droites d'intersection des couples de plans de l'octuple $[P_1, P'_1], \ldots, [P_4, P'_4]$; la courbe résiduelle est donc soit une conique, soit un système de deux droites ne se rencontrant pas.

Nous écarterons la première hypothèse en montrant que la courbe rencontre en deux points chacune des quatre droites joignant les couples de points de l'octuple $[a_1, a'_1], \ldots, [a_4, a'_4]$. Considérons en effet parmi les quadriques circonscrites à l'octuple celles qui contiennent la droite $[a_i, a'_i]$; elles forment un faisceau ponctuel et se coupent toutes suivant la droite $[a_i, a'_i]$ et une cubique gauche Γ_i, laquelle passe par les six points de l'octuple autres que a_i, a'_i et rencontre la droite $[a_i, a'_i]$ en deux points.

Ceux-ci appartiennent au lieu géométrique, puisque la cubique est projetée de chacun d'eux suivant un cône du second ordre circonscrit à l'octuple. De là résulte que le lieu cherché se compose de deux droites Δ, Δ'.

Si nous remarquons enfin que chacune des droites Δ, Δ' rencontre nécessairement le plan P_i en un point de son intersection avec le plan P'_i, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Étant donné un octuple gauche complet, il existe deux droites Δ, Δ' rencontrant à la fois les quatre droites d'intersection d'un couple de plans et les quatre droites joignant un couple de points.

Chaque point de l'une de ces droites est le sommet d'un cône du second ordre passant par les huit points de l'octuple, et, corrélativement, chaque plan mené par l'une d'elles contient une conique tangente aux huit plans de l'octuple (¹).

Du fait que les points d'intersection de la droite $[a_i, a'_i]$ avec les droites Δ, Δ' appartiennent à la cubique Γ_i on déduit une proposition qui nous sera utile un peu plus loin : la quadrique Q_{ijk} définie par les trois droites $[a_i, a'_i]$, $[a_j, a'_j]$, $[a_k, a'_k]$ contient la cubique gauche Γ_i définie par les six points a_i, a'_i, a_j, a'_j, a_k, a'_k.

Enfin nous nous bornerons à énoncer les théorèmes suivants relatifs aux droites Δ, Δ' et dont il est aisé de donner une démonstration analytique :

Les points de rencontre de la droite (P_i, P'_i) *avec les droites Δ, Δ' sont les points doubles de l'involution déterminée sur cette droite par les quadriques circonscrites à l'octuple.*

De là le corollaire suivant :

(¹) La seconde partie de ce théorème a déjà été énoncée par M. Bricard qui y avait été conduit par une voie différente (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXIV, n° I).

Les plans P_i, P'_i *et les plans déterminés par la droite* $[P_i, P'_i]$ *avec les droites* Δ, Δ' *forment un faisceau harmonique; de même les points où les droites* Δ, Δ' *rencontrent la droite* $[a_i, a'_i]$ *divisent harmoniquement le segment* $a_i a'_i$.

Enfin le rapport anharmonique des quatre points d'intersection de la droite Δ *avec les droites* $[P_i, P'_i]$ *est égal à celui des quatre plans déterminés par la droite* Δ *avec les droites* $[a_i, a'_i]$.

II.

Les théorèmes précédents nous permettent d'étudier la surface Σ dont voici la définition géométrique :

Elle est du quatrième ordre, elle admet pour points doubles les huit sommets de l'octuple et contient les quatres droites $[a_i, a'_i]$.

Cette surface dépend linéairement d'un paramètre, car toute surface du quatrième ordre à huit points doubles (formant groupe de Lamé) a une équation de la forme

$$f(P, Q, R) = 0,$$

où f désigne un polynome homogène de degré 2, et $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ les équations de trois quadriques passant par les huit points doubles. Or la surface Σ est assujettie de plus à quatre conditions linéaires.

Cette surface contient les quatre cubiques gauches Γ_i, car elle rencontre chacune d'elles en quatorze points, à savoir six points doubles et les deux points d'intersection de la cubique Γ_i avec la droite $[a_i, a'_i]$.

Considérons dès lors l'intersection de Σ avec la quadrique Q_{234} définie par les trois droites $[a_2, a'_2]$,

$[a_3, a'_3]$. $[a_4, a'_4]$: elle comprend ces trois droites et la cubique gauche Γ_1. La courbe résiduelle se compose de deux génératrices de système opposé aux droites $[a_2, a'_2]$, ..., $[a_4, a'_4]$.

En effet le long de toute biquadratique tracée sur la surface $f(P, Q, R) = 0$ et passant par les huit points doubles, on peut circonscrire une quadrique à la surface ; soit donc Q_2 la quadrique circonscrite à S le long de la biquadratique formée par la droite $[a_2, a'_2]$ et la cubique Γ_2. Les quadriques Q_2 et Q_{234} sont tangentes en deux points de la droite $[a_2, a'_2]$ et, par suite, les génératrices d, d' de la quadrique Q_{234} qui passent par ces points y sont tangentes à la quadrique Q_2 et à la surface Σ, et dès lors sont situées tout entières sur cette surface.

D'où ce théorème :

Toute surface du quatrième ordre qui admet pour points doubles les sommets d'un octuple complet et contient les quatre droites $[a_i, a'_i]$ possède en outre quatre couples de droites d_i, d'_i, les droites d'un même couple d_i, d'_i rencontrant les trois droites $[a_j, a'_j]$, $[a_k, a'_k]$, $[a_l, a'_l]$.

Cette surface admet une génération géométrique simple : elle est l'enveloppe des quadriques Q circonscrites à l'octuple et tangentes à une droite d s'appuyant sur trois des droites $[a_i, a'_i]$.

Cette nouvelle définition est équivalente à la première, car la droite d et par suite l'enveloppe des quadriques Q dépend de *un* paramètre seulement, de même que la surface Σ ; d'où cette conclusion :

Les quadriques circonscrites à un octuple gauche et tangentes à une droite d s'appuyant sur trois des droites (a_i, a'_i) sont tangentes à sept autres droites.

Les huit droites d forment une configuration qu'il est aisé de construire, dès que l'on se donne l'une d'elles d_1.

L'équation de la surface Σ dépend linéairement d'un paramètre : quand il varie, les deux droites d_i, d'_i qui appartiennent à un même système de génératrices de la quadrique Q_{jkl} sont en involution, et l'on reconnaît aisément que les génératrices doubles de cette involution sont les droites Δ, Δ'. Par suite, les points de rencontre des droites d_i, d'_i avec la droite $[a_j, a'_j]$ divisent harmoniquement le segment a_j, a'_j.

Considérons d'autre part les quatre coniques C_{123}, ..., C_{412} sections des quadriques Q_{123}, ..., Q_{412} par l'un des plans de l'octuple; la surface Σ coupe ce plan suivant deux coniques C, C', et les points d'intersection des coniques C, C' avec la conique C_{jkl} (en dehors des sommets de l'octuple) sont respectivement les traces des droites d_i et d'_i.

Ainsi, de la droite d_1 on déduit sans ambiguïté la droite d'_1, puis les coniques C, C' et, par suite, les trois autres couples d_i, d'_i.

III.

Nous avons établi [1] que les surfaces Σ sont hyperelliptiques, mais il y a des cas de dégénérescence.

Trois des surfaces Σ se décomposent en un couple de quadriques : ce sont les couples

$$[S_{12}, S_{34}], [S_{13}, S_{24}], [S_{14}, S_{23}],$$

S_{ij} désignant la quadrique qui passe par les huit som-

---

[1] *Comptes rendus* 26 mars 1906.

mets de l'octuple et contient les deux droites $[a_i, a'_i]$ et $[a_j, a'_j]$.

Supposons d'autre part que la droite d coïncide avec la droite Δ; dans ce cas les huit droites d_i, d'_i se confondent avec la droite Δ qui est une droite double de la surface Σ_0, et les deux coniques C, C' d'intersection de la surface avec chacun des plans de l'octuple sont confondues : la surface admet donc huit plans tangents suivant une conique. Il en résulte que la section de la surface par un plan quelconque mené par la droite double Δ est une conique tangente aux huit plans de l'octuple.

La surface admet donc deux définitions corrélatives : d'une part, elle est l'enveloppe de la famille des cônes du second ordre circonscrits à l'octuple dont les sommets sont situés sur la droite Δ; d'autre part, elle est engendrée par la famille de coniques tangentes aux huit plans de l'octuple dont les plans passent par cette même droite Δ.

Enfin la surface admet un plan tangent unique le long de chacune des droites $[a_i, a'_i]$, puisqu'on peut lui circonscrire un cône le long de cette droite.

Cette surface unicursale du quatrième ordre a été étudiée par Plücker. On peut donc considérer la surface de Plücker comme une dégénérescence de la surface hyperelliptique Σ.

IV.

Nous étudierons en second lieu une autre surface du quatrième ordre S qui se trouve également liée à la configuration de l'octuple complet et dont voici la définition :

Elle est du quatrième ordre et admet quatre plans tangents chacun le long d'une droite.

Pour construire une telle surface S on peut se donner les quatre plans P_1, P_2, P_3, P_4 : mais les droites de contact D_1, ..., D_4 ne peuvent être prises arbitrairement dans ces plans. En effet, la surface S coupe le plan P_i, en dehors de la droite de contact, suivant une conique C_i, et celle-ci doit passer par les traces d_j, d_k, d_l, des droites D_j, D_k, D_l sur le plan P_i, et être tangente en ces points aux plans P_j, P_k, P_l. Ceci exige que les droites joignant respectivement les points d_j, d_k, d_l aux sommets A_j, A_k, A_l du tétraèdre formé par les plans P_i soient concourantes. Considérons d'autre part les plans P'_i déterminés respectivement par la droite D_i et le sommet opposé du tétraèdre A_i : ces plans forment un tétraèdre inscrit et circonscrit au premier; en d'autres termes, les huit plans P, P′ constituent un octuple gauche complet.

Inversement soit un octuple complet : ses huit plans peuvent être, de quatre manières différentes, répartis en deux tétraèdres P, P′ inscrits et circonscrits l'un à l'autre; chacun de ces tétraèdres permet de définir un système de quatre droites D_i et de quatre coniques C_i.

Prenons les plans P pour tétraèdre de référence, et soit $S_0(x, y, z, t) = 0$ l'équation d'une surface du quatrième ordre passant par les quatre coniques C et tangente aux plans P le long des droites D [1]; l'équation générale des surfaces S jouissant de cette propriété est de la forme

$$S_0(x, y, z, t) + \lambda xyzt = 0. \tag{I}$$

---

[1] On reconnaît par un compte de constantes qu'il est possible de former effectivement une telle surface.

Au point de vue projectif l'octuple complet dépend de deux paramètres et la surface S de trois paramètres.

La surface S possède douze points doubles, trois sur chacune des droites D: en effet l'équation de la surface a la forme suivante :

$$D^2(x, y, z)C(x, y, z) + t.f(x, y, z, t) = 0,$$

$D(x, y, z) = 0$ et $C(x, y, z) = 0$ étant les équations de la droite de contact D et de la conique C dans le plan $t = 0$ et le polynome $f(x, y, z, t)$ étant du troisième ordre.

Les trois points d'intersection de la droite D avec la surface $f(x, y, z, t) = 0$ sont manifestement des points doubles de la surface.

L'équation (I) de la surface S dépend linéairement du paramètre λ; de là plusieurs conséquences géométriques.

Les points doubles a_i, b_i, c_i situés sur une même droite D_i appartiennent à une involution linéaire du troisième ordre. Cette involution se laisse définir simplement au moyen des droites D et des plans P. A cet effet considérons les droites Δ, Δ' qui s'appuient sur les quatre droites D: on peut déterminer le paramètre λ de manière que la surface S contienne la droite Δ, et dès lors celle-ci est une droite double, puisque ses points de rencontre δ_i avec les quatre droites D_i sont des points doubles de la surface (ce sont même des points-pince). Si l'on prend pour plans coordonnés $X = 0$, $Y = 0$ deux plans passant par la droite Δ et pour plan $T = 0$ le plan tangent le long de la droite D, l'équation de la surface prend la forme

$$(aX + bY)^2 C(X, Y, Z) + T(PX^2 + QXY + RY^2) = 0,$$

P, Q, R étant trois polynomes homogènes du premier

degré en X, Y, Z, T. On en déduit que l'involution des points a_i, b_i, c_i a deux de ses points confondus avec le point δ_i.

Cette involution est donc parfaitement définie puisque l'on connaît deux de ses points doubles, δ_i, δ'_i et, de plus, un groupe particulier formé par les points d'intersection de la droite D_i avec les plans P_j, P_k, P_l.

Les involutions du troisième ordre ainsi définies sur les quatre droites se correspondent homographiquement : ceci résulte du théorème suivant dont la démonstration analytique ne présente pas de difficulté :

L'homographie H_{ij}, *qui fait correspondre respectivement aux points d'intersection de la droite* D_i *avec les plans* P_j, P_k, P_l *les points d'intersection de la droite* D_j *avec les plans* P_i, P_l, P_k, *fait correspondre les points d'intersection de ces droites avec chacune des deux droites* Δ, Δ'.

De là résulte que les points a_i, b_i, c_i, d'une part, et a_j, b_j, c_j, d'autre part, décrivent sur les droites D_i et D_j des divisions homographiques lorsque le paramètre λ varie.

Les propriétés précédentes permettent de déterminer sans ambiguïté les douze points doubles de la surface S dès qu'on se donne l'un d'eux. Nous allons en déduire quelques propriétés géométriques de la surface.

Considérons le faisceau des quadriques qui contiennent les droites D_3, D_4 et passent par les points d'intersection α_{13} et α_{24} de la droite D_1 avec le plan P_3 et de la droite D_2 avec le plan P_4. Elles déterminent sur les droites D_1 et D_2 une correspondance homographique qui coïncide avec l'homographie H_{12} puisqu'elle a avec elle trois couples communs : δ_1, δ_2 ; δ'_1, δ'_2 ; et les points d'intersection α_{14} et α_{23} de la droite D_1

avec le plan P_4 et de la droite D_2 avec le plan P_3. Par suite on peut mener une quadrique par les droites D_3, D_4, par les points α_{13}, α_{24} et par un couple quelconque a_1, a_2 de l'homographie H_{12}. On en déduit aisément qu'il existe une quadrique contenant les droites D_3, D_4 et passant par deux couples quelconques a_1, a_2 et b_1, b_2 de cette homographie. Ceci posé, soient une surface S quelconque, a_i, b_i, c_i ses douze points doubles; les huit points (a_i, b_i) forment un groupe de Lamé puisque l'on peut faire passer par ces points trois quadriques n'appartenant pas à un même faisceau.

Donc les douze points doubles de la surface S se répartissent en trois groupes de huit points de Lamé (a_i, b_i), (b_i, c_i), (c_i, a_i) [1]. Par suite la surface peut être considérée de trois manières comme l'enveloppe d'une famille de quadriques passant par un de ces groupes de huit points et bitangentes à chacune des quatre coniques C.

Considérons celle des quadriques de la famille $Q_{a,b}$ qui passe par le point c_i; c'est nécessairement un cône de sommet c_i, circonscrit à la surface le long de la droite D_i et d'une cubique gauche qui passe par les sept points doubles c_i, a_j, b_j, a_k, b_k, a_l, b_l. La surface possède douze cubiques analogues Γ_{a_1}, Γ_{a_2}, ..., Γ_{c_4}.

V.

Parmi les surfaces S, il en existe quatre remarquables : ce sont celles pour lesquelles les involutions linéaires a_i, b_i, c_i ont un point double. Deux de ces sur-

---

[1] On pouvait prévoir *a priori* que la surface appartient à ce type d'après la classification des surfaces du quatrième ordre à 12 points doubles (Rohn, *Mathematische Annalen*, t. XXIX, 1887).

faces S_0, S'_0 sont celles qui admettent respectivement les droites Δ, Δ' pour droites doubles; elles sont engendrées par une conique dont le plan tourne autour de l'une des droites Δ, Δ' et qui rencontre en deux points chacune des coniques C.

Considérons les deux surfaces S_1, S'_1 correspondant aux autres points doubles de l'involution. Pour chacune d'elles les points a_i et b_i sont confondus : dès lors les huit cubiques gauches Γ_{a_i} et Γ_{b_i} sont confondues en une cubique Γ qui passe par les huit points a_i et c_i. Cette cubique est nécessairement une courbe double de la surface, puisqu'elle est projetée de chacun des points a_i suivant un cône circonscrit à cette surface.

Ainsi les surfaces S_1, S'_1 sont des surfaces du quatrième ordre à cubique double; elles peuvent être engendrées par une droite qui rencontre en deux points la cubique Γ et qui rencontre également les quatre coniques C. Comme les surfaces de ce type dépendent de dix-sept paramètres, on en conclut que les surfaces du quatrième ordre à cubique double, de première espèce (c'est-à-dire dont les réciproques sont du même type) sont une dégénérescence des surfaces hyperelliptiques S.

La cubique double de la surface S_1 rencontre la droite D_i en deux points : le point double de l'involution a_i, b_i qui est un point-pince de la surface, et le troisième point de l'involution c_i où elle est tangente au plan P_i. On reconnaît aisément que ce point coïncide avec l'un des points d'intersection de la droite D_i avec la conique C_i. Les points d'intersection des droites D_i avec les coniques C_i sont donc des points homologues dans les homographies H_{ij}.

En tout point de la cubique double Γ le cône circonscrit à la surface S_1 comprend le cône projetant la

courbe double, qui doit être compté deux fois, et un cône du second degré. La surface S peut donc être regardée comme l'enveloppe d'une famille de cônes du second degré bitangents aux quatre coniques C.

Résumons en terminant la définition et les propriétés du système des droites D et des coniques C.

Soient P_1, P'_1, ..., P_4, P'_4 *les couples de plans d'un octuple gauche complet. Considérons d'une part les quatre droites* D_i *d'intersection de deux plans d'un même couple* P_i, P'_i *et, d'autre part, les quatre coniques* C_i *définies de la manière suivante : On répartit les huit plans de l'octuple en deux tétraèdres inscrits et circonscrits l'un à l'autre et l'on considère l'un de ces tétraèdres* P_1, P_2, P_3, P_4, *par exemple; la conique* C_i *est située dans le plan* P_i, *elle passe par les traces des droites* D_j, D_k, D_l, *sur ce plan et elle est tangente en ces points aux plans* P_j, P_k, P_l (¹).

Le système des coniques C jouit des propriétés suivantes :

Les quadriques bitangentes aux quatre coniques C *forment une famille deux fois infinie.*

Il existe deux familles de cônes du second degré bitangents aux quatre coniques C *dont les sommets sont situés respectivement sur deux cubiques gauches et qui enveloppent deux surfaces unicursales du quatrième ordre* S_1, S'_1 (²).

(¹) On peut répartir les plans de l'octuple en deux tétraèdres inscrits et circonscrits l'un à l'autre de quatre manières différentes et, par suite, étant donné un octuple complet, il existe huit systèmes analogues de quatre coniques C.

(²) On obtient quatre autres familles de cônes bitangents aux coniques C en considérant les cônes du second ordre circonscrits à une sur-

Il existe deux familles de coniques rencontrant en deux points chacune des coniques C; *les plans des coniques d'une même famille passent par l'une des droites* Δ, Δ' *qui s'appuient sur les quatre droites* D *et ces coniques engendrent une surface unicursale du quatrième ordre.*

Il existe quatre familles de droites rencontrant les quatre coniques C; *ce sont les deux systèmes de génératrices des deux surfaces* S_1 *et* S'_1.

Enfin les points où la droite D_i *rencontre les trois plans* P_j, P_k, P_l, *les droites* Δ, Δ' *et la conique* C_i *ont mêmes rapports anharmoniques quelle que soit la droite* D_i *considérée.*

Or nous avons remarqué au début de cette Note que les points de rencontre de la droite D_i avec les plans P_j, P'_j et avec les droites Δ, Δ' forment une division harmonique; en rapprochant cette remarque du théorème précédent, on obtient la proposition suivante :

Étant donné un octuple gauche complet, les points où la droite d'intersection de deux plans d'un même couple rencontre les six autres plans de l'octuple ont mêmes rapports anharmoniques, quel que soit le couple considéré.

[R1e]

SUR LE SYSTÈME ARTICULÉ DE HART;

PAR M. G. FONTENÉ.

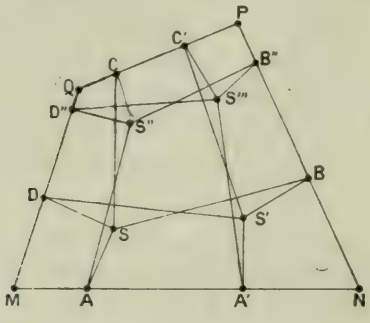
Mon but est simplement de faire connaître aux lecteurs de ce Journal une propriété curieuse signalée en

---

face variable S et qui ont pour sommets les points doubles de cette surface.

1893 par le Dr Burmester (*Zeitschrift für Mathematik und Physik...*).

1. Le système articulé de Hart, généralisé par Kempe, se compose d'un quadrilatère articulé MNPQ et de quatre tiges SA, SB, SC, SD articulées avec les



côtés de ce quadrilatère. Les divisions de points MAN et QCP doivent être semblables, ainsi que les divisions de points MDQ et NBP; les quatre points A, B, C, D doivent être à un cercle. Si l'on désigne par a, b, c, d les quatre côtés du quadrilatère, et si l'on pose

$$QC = c.g, \qquad QD = d.h,$$

d'où

$$MA = a.g, \qquad PB = b.h,$$

cette dernière condition se traduit par la relation *doublement quadratique*

$$\frac{c^2}{h} + \frac{a^2}{1-h} = \frac{d^2}{g} + \frac{b^2}{1-g},$$

dont j'ai fait usage précédemment (*Nouvelles Annales*, 1904, p. 25).

Si l'on regarde g et h comme les coordonnées carté-

siennes d'un point, la courbe représentée par l'équation précédente est une cubique circonscrite au quadrilatère complet dont les côtés sont représentés par les équations

$$g = 0, \qquad g = 1, \qquad h = 0, \qquad h = 1;$$

deux sommets opposés de ce quadrilatère complet sont à l'infini sur les axes. D'après la théorie des points correspondants sur une cubique, on peut donc inscrire à la cubique considérée une infinité de quadrilatères complets ayant deux sommets à l'infini sur les axes ; en d'autres termes, si g et h sont les coordonnées d'un point de la courbe, donnant lieu aux points de coordonnées g', h et g, h'', le point de coordonnées g', h'' est aussi sur la courbe. Dès lors, en partant de l'appareil simple MNPQ, SA, SB, SC, SD, conservons les points B et D et remplaçons les points A et C par les points A′ et C′, ce qui remplace S par S′, le quadrilatère SBS′D étant un contre-parallélogramme (Hart, Kempe, *Nouvelles Annales*, 1904, p. 25); conservons de même les points A et C, et remplaçons B et D par B″ et D″, avec S″ au lieu de S; *nous pourrons encore prendre comme points d'articulation les deux couples de points* A′, C′ *et* B″, D″, *en remplaçant* S *par* S‴. On a ce tableau :

	AB	A′C′
BD	S	S′
B″D″	S″	S‴

2. Un point tel que S est foyer d'une conique ins-

crite au quadrilatère MNPQ. On sait que le lieu de ces foyers est une cubique bicirculaire, dont les tangentes aux points cycliques I et J se coupent en un point S_0 de la courbe, foyer de la parabole inscrite; une telle cubique bicirculaire est appelée *focale*. Les deux foyers d'une même conique sont, sur la courbe, des points *correspondants*, au sens de ce mot rappelé ci-dessus, et la correspondance en question est, parmi les trois correspondances existantes, celle qui associe les points cycliques; les points M et P sont des points correspondants, de même les points N et Q, et aussi les points X et Y, en appelant ainsi les points de croisement des droites MN et PQ, MQ et NP.

Or, d'après le Dr Burmester, la droite SS′ passe en X, la droite SS″ en Y. Il en résulte d'abord que les droites XS″ et YS′ se coupent en un point S‴ de la courbe. En outre, S′ et S″, par exemple, sont les deux foyers d'une même conique inscrite au quadrilatère.

3. En particulier (*voir* la figure dans les *Nouvelles Annales, loc. cit.*, p. 22) *si* S *est le foyer* S_0 *de la parabole inscrite*, les contre-parallélogrammes SBS′D et SCS″A fournissent les points S′ et S″, dont chacun donne lieu au guidage rectiligne d'un point (appareil de Hart), et S‴ est à l'infini. On a ici, en partant de S,

$$\frac{c^2}{h} + \frac{a^2}{1-h} = 0, \qquad \frac{d^2}{g} + \frac{b^2}{1-g} = 0,$$

$$g' = \infty, \qquad h'' = \infty.$$

[R1e]

SUR UN SYSTÈME ARTICULÉ;

PAR M. R. BRICARD.

1. On sait que si l'on réalise par des tiges rigides, articulées en leurs points de rencontre, un nombre quelconque de génératrices d'un hyperboloïde, on obtient une figure déformable.

Bien que ce résultat soit très connu, il ne se trouve généralement pas exposé dans les Ouvrages classiques. Aussi ne crois-je pas inutile d'en donner ici une démonstration, qui me paraît d'ailleurs particulièrement simple.

Je dirai, dans ce qui suit, que deux points variables sont *liés* quand leur distance reste constante. En employant cette expression, on peut énoncer le théorème suivant :

Soit ABCD *un quadrilatère gauche articulé. Supposons qu'on le déforme de telle manière que les carrés des longueurs de ses diagonales satisfassent à une relation linéaire*

$$\alpha\overline{AC}^2 + \beta\overline{BD}^2 = K, \tag{1}$$

α, β *et* K *étant des constantes. Dans ces conditions, tout point de* AB *est lié à un certain point de* CD; *tout point de* BC *est lié à un certain point de* HD. *Les droites joignant deux à deux les divers points liés sont les génératrices d'un hyperboloïde, déformable dans les conditions rappelées au début de cette Note.*

Soient, en effet, M un point de AB, N un point

de CD. Leur liaison s'exprime par la relation

$$MN = \text{const.}$$

Mais on a, en vertu d'un théorème connu de Géométrie élémentaire (théorème de Stewart),

$$CD.\overline{MN}^2 + DN.\overline{MC}^2 + NC.\overline{MD}^2 = \text{const.},$$

le second membre ne dépendant que des longueurs CD, CN. On doit donc avoir

$$DN.\overline{MC}^2 + NC.\overline{MD}^2 = k_1,$$

k_1 étant une constante. On a, en vertu du même théorème,

$$AB.\overline{MC}^2 + BM.\overline{AC}^2 = k_2,$$
$$AB.\overline{MD}^2 + MA.\overline{BD}^2 = k_3,$$

k_2 et k_3 étant encore des quantités qui ne dépendent que des longueurs AB, AM, AD et BC. En éliminant MC, MD entre les deux relations, il vient

$$(2) \qquad MB.ND.\overline{AC}^2 + MA.NC.\overline{BD}^2 = k_4,$$

c'est-à-dire une relation de la forme (1). Les deux relations sont identiques si l'on a

$$(3) \qquad \frac{MB.ND}{\alpha} = \frac{MA.NC}{\beta} = \frac{k_4}{k},$$

ce qui peut être vérifié pour une infinité de choix du couple de points M et N. On vérifiera de même que deux points P et Q, appartenant respectivement à BC et à DA, sont liés si l'on a

$$(4) \qquad \frac{PB.QD}{\alpha} = \frac{PC.QA}{\beta}.$$

Le reste de l'énoncé s'établit très facilement au moyen des relations (3) et (4). J'en laisse le soin au lecteur.

2. On peut obtenir une combinaison assez remarquable d'hyperboloïdes articulés.

Soient A, B, C, D, A′, B′, C′, D′, huit points liés entre eux, comme l'indique la figure 1. La figure est celle d'un hexaèdre, à cela près que les faces telles que ABCD ne sont pas planes.

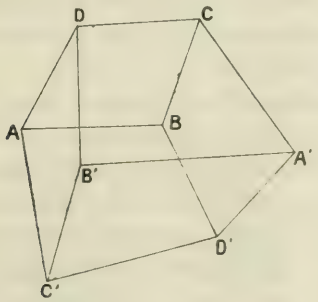
La figure étant constituée par 8 points assujettis à 12 conditions dépend de $3.8 - 12 = 12$ paramètres; 6 de ces paramètres sont des paramètres de position. La figure dépend donc de 6 paramètres de grandeur.

Il en résulte que si dans chacun des six quadrilatères tels que ABCD, on introduit une liaison entre deux points appartenant à deux côtés opposés, le système sera généralement rigide. Il y a donc intérêt à montrer l'existence d'un système agencé de cette manière et déformable.

Je procéderai à cet effet de la manière suivante :

Construisons la figure 1 de telle manière que les

Fig. 1.

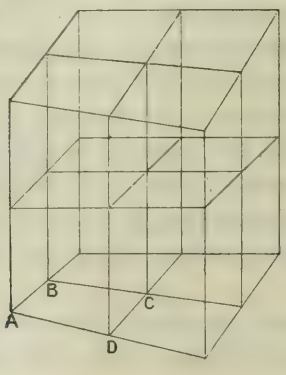


points A et A′, B et B′, C et C′, D et D′ soient deux à

deux symétriques par rapport à une droite Δ. On peut se donner *a priori* les 4 points A, B, C, D et la droite Δ. Les quatre autres points sont alors déterminés. La figure dépend donc de $4 \times 3 + 4 = 16$ paramètres, dont 10 sont des paramètres de grandeur.

Cela posé, assujettissons six des arêtes, dont deux quelconques ne sont pas symétriques par rapport à Δ, à être de longueurs constantes d'ailleurs quelconques (on peut choisir, par exemple, les arêtes AB, AD,

Fig. 2.



AC′, BD′, C′B′, C′D′). Les six autres arêtes, qui sont égales aux premières, chacune à chacune, sont aussi de longueurs constantes.

La figure dépend maintenant de $10 - 6 = 4$ paramètres de grandeur. Nous pouvons donc lui imposer encore trois conditions sans qu'elle cesse d'être déformable. Nous les choisissons ainsi qu'il suit : chacun des quadrilatères ABCD, ABD′C′, ADB′C′ devra se déformer de telle manière qu'il existe une relation linéaire entre les carrés de ses diagonales. S'il en est ainsi, chacun des quadrilatères A′B′C′D′, A′B′DC,

A'D'BC, qui sont égaux respectivement aux trois premiers, satisfait à une condition de même nature.

Si alors on se reporte au théorème qui a été établi au n° 1, on voit que *la figure* ABCDA'B'C'D' *peut se déformer de telle manière que, dans chaque quadrilatère tel que* ABCD, *un point quelconque d'un côté soit lié à un point convenablement choisi sur le côté opposé.* Nous avons, par conséquent, réalisé un assemblage de six hyperboloïdes articulés.

Un fait est intéressant à signaler : soit α un point de AB, β le point de CD qui est lié à α, γ le point de A'B' qui est lié à β, δ le point de C'D' qui est lié à γ; *le point* δ *est lié au point* α. On établit bien aisément ce résultat au moyen de la relation (3).

Note. — Dans une Note ancienne [1], M. J. Larmor étudie un système de 27 tiges articulées, constitué comme l'indique la figure 2, et conclut que ce système, construit d'une manière aussi générale que possible, est déformable avec *trois* degrés de liberté (comme c'est évidemment le cas lorsque les 27 tiges sont réparties en trois groupes de 9 tiges parallèles entre elles, la figure étant alors constituée par un assemblage de parallélépipèdes). S'il en était bien ainsi, les résultats contenus dans le n° 2 du travail précédent ne présenteraient aucun intérêt. Mais le raisonnement de M. Larmor repose sur un compte inexact des équations qui relient certaines variables, et ses conclusions ne sont pas légitimes [2].

---

(1) *On possible systems of jointed wickerwork, and their degrees of internal freedom* (*Proceedings of the Cambridge philosophical Society*, t. V, 1884, p. 161).

(2) L'auteur prend comme inconnues les 81 cosinus directeurs des 27 tiges du système, et cherche le nombre des équations indépen-

J'ai pensé (ainsi que M. Larmor, à qui j'avais communiqué l'observation qui précède) qu'il y avait lieu de signaler l'inexactitude d'un résultat qui paraît avoir été admis jusqu'ici sans discussion [1]. On voit en effet se poser une question intéressante : *Est-il possible de construire un système articulé, du type de la figure* 2, *déformable avec au moins un degré de liberté?* En dehors, bien entendu, du cas où tous les quadrilatères de la figure sont des parallélogrammes, et du cas où le système est constitué par trois *systèmes binaires* égaux, reliés par des tiges égales et parallèles (M. Larmor appelle *système binaire* la figure formée par 6 génératrices d'un hyperboloïde déformable, 3 d'un système et 3 de l'autre).

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Mouvement d'un corps solide mobile sans frottement autour d'une droite fixe.*

Cas où la fixité de la droite est obtenue par celle de deux points du corps. Calcul des pressions supportées par ces points. Axes permanents et axes naturels de rotation.

II. *Soient* $Oxyz$ *un système d'axes rectangulaires dont*

---

dantes, fournies par le théorème des projections, qui relient ces cosinus. Chaque contour fermé, par exemple le quadrilatère ABCD de la figure 2, donne 3 équations. M. Larmor ne compte que 24 contours indépendants dans la figure, ce qui lui donne 72 équations. Il y a en réalité 28 contours indépendants, ce qui porte le nombre des équations à 84.

[1] Par exemple dans l'*Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, t. IV_1, p. 277.

l'axe Oz *est vertical, et les deux droites*

$$D \begin{cases} y = 0, \\ z = a, \end{cases} \qquad D' \begin{cases} x = 0, \\ z = -a, \end{cases}$$

situées respectivement dans les plans xOz, yOz.

Une tige matérielle pesante, homogène, de longueur $2l$ *est assujettie à glisser sans frottement par ses extrémités sur les droites* D, D'. *De plus, chaque point matériel de la tige est attiré par le point* O *proportionnellement à sa masse et à sa distance au point* O.

1° *Trouver le mouvement de la tige;*

2° *Imaginant que la tige considérée appartienne à une figure plane dont le plan est assujetti à rester vertical, étudier au point de vue cinématique le mouvement de cette figure. Quel est le lieu décrit par un point quelconque de la figure?*

Épreuve pratique. — *On veut atteindre, avec un projectile pesant* 50^g, *dont la vitesse initiale est de* 10^m *par seconde, un point situé, horizontalement, à* 5^m *de distance, et placé à* 3^m *au-dessus du point de départ du mobile.*

On demande de calculer :

1° *L'angle de la vitesse initiale avec l'horizon;*

2° *La grandeur de la vitesse finale et l'angle qu'elle fait avec l'horizon;*

3° *La perte d'énergie du projectile;*

4° *La durée du mouvement.*

On ne considérera que la parabole de renversement *et l'on négligera la résistance de l'air.*

Accélération de la pesanteur, $g = 9{,}81 \left(\frac{m}{\sec^2}\right)$.

(Novembre 1906.)

Caen.

Épreuve écrite. — I. *Établir les équations propres à déterminer l'accélération, à un instant donné, des divers points d'une figure plane qui se meut dans son plan. Centre des accélérations.*

Trouver ce centre A *dans le cas où une chaînette don-*

née, appartenant au plan mobile, roule sans glisser sur une droite fixe, le point de contact se déplaçant de manière que sa distance à l'axe de la chaînette soit proportionnelle au temps. Le point A *est fixe pendant tout le mouvement. sa vitesse relative au plan mobile garde une grandeur constante.*

II. *On considère deux tiges homogènes, égales, non pesantes,* OA, AB *articulées en* A; OA *peut tourner autour du point fixe* O, *et le point* B *glisse sur une droite fixe* OZ. *Chaque élément des deux tiges est attiré vers* OZ *par une force égale au produit de sa masse par sa distance à* OZ. *Soient* θ *l'angle* ZOA, ψ *l'angle du plan* OAB *avec un plan fixe mené par* OZ. *Le système ayant un mouvement initial connu, former et discuter les équations qui donnent* θ *et* ψ. *Conditions initiales telles :* 1° *que* θ *reste constant,* 2° *que* $\frac{d\theta}{dt}$ *s'annule pour* $\theta = \frac{\pi}{2}$: *cela arrivera-t-il au bout d'un temps fini?*

SOLUTION.

$$\sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = \psi'_0 \sin^2\theta_0,$$

$$(1 + 3\sin^2\theta)\sin^2\theta \frac{d\theta^2}{dt^2} = (\sin^2\theta_0 + 3\sin^4\theta_0)\theta'^2_0 + (\sin^2\theta_0 - \sin^2\theta)(\sin^2\theta - \psi'^2_0 \sin^2\theta_0).$$

(Novembre 1906.)

Grenoble.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un solide pesant* S *est limité extérieurement par une sphère de rayon* a. *La distribution des masses est telle que le centre de gravité* G *de* S *coïncide avec le centre de la sphère, et que l'ellipsoïde d'inertie relatif à ce point est de révolution; soit* Gz *l'axe de révolution.*

Le solide est posé à l'intérieur d'une sphère creuse Σ *de centre* O, *de rayon* $R + a$. *Cette sphère est fixe; la liaison est sans frottement.*

Déterminer le mouvement de S, *en employant successi-*

vement les théorèmes généraux et les équations de Lagrange.

On déterminera la position de S *par l'angle* θ *que fait* OG *avec la verticale descendante* Oz_1 *du point* O, *par l'angle* ψ *que fait le plan* GOz_1 *avec un plan vertical fixe, et par les angles d'Euler* ψ_1, θ_1, φ_1 *définissant l'orientation relative des deux trièdres trirectangles* $Gxyz$, $Ox_1y_1z_1$; *le premier lié au solide* S *en est un trièdre principal d'inertie, le second est fixe.*

On appellera M *la masse de* S, A *et* C *les moments d'inertie relatifs à* Gx *et* Gz.

Épreuve pratique. — *Dans un trièdre trirectangle fixe* $Oxyz$ *l'axe* Oy *est horizontal, et l'angle* zOx *admet comme bissectrice intérieure la verticale descendante.*

Le sommet O *du trièdre et un autre point* O' *situé sur* Oz *à la distance* 2R *du point* O *sont les deux extrémités du diamètre limite d'une demi-circonférence homogène pesante de masse* M. *Cette circonférence peut donc tourner autour de* Oz; *la liaison est sans frottement.*

1° *La circonférence étant supposée située dans le plan* zOx, *déterminer les coordonnées de son centre de gravité et l'équation de l'ellipsoïde d'inertie relatif au point* O.

2° *On suppose que la circonférence placée dans le plan* zOy *soit abandonnée sans vitesse. Elle se met à osciller autour de* Oz. *Déterminer les réactions exercées par les points* O *et* O' *lorsque le plan de la circonférence vient coïncider avec le plan* zOx. (Novembre 1906.)

Lille.

Épreuve écrite. — Cours : *Extension des équations de Lagrange :*

1° *Aux systèmes dont la position n'est pas définie à l'aide du nombre minimum de paramètres;*

2° *Aux systèmes non holonomes sans frottement;*

3° *Aux systèmes doués de frottement.*

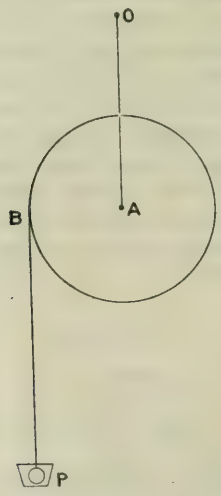
Problème. — I. Cinématique : *Déterminer le mouvement d'une figure plane dans son plan dans le cas où le centre*

des accélérations est fixe dans le plan fixe et où le centre instantané de rotation décrit une droite dans le plan fixe (roulante et loi d'orientation).

II. Dynamique : *Un cylindre de révolution à axe vertical tourne d'un mouvement uniforme autour d'une de ses génératrices* G. *Un point matériel pesant est assujetti à rester sur la surface de ce cylindre, supposée parfaitement polie; il est de plus attiré par la droite* G *proportionnellement à la distance. Étudier le mouvement relatif du point sur le cylindre (conditions initiales quelconques; discussion).* (Novembre 1906.)

Marseille.

Épreuve théorique. — *Un disque circulaire homogène est suspendu par un axe* A, *placé à son centre, autour duquel*



il peut tourner, à un point fixe O, *au moyen de deux fils élastiques égaux qui s'allongent proportionnellement à leur tension. Sur la circonférence du disque est enroulé un fil flexible et inextensible qui porte à son extrémité un poids* P.

A l'origine, le système est en repos, les fils sont verticaux et les fils OA *sont à l'état naturel.*

On abandonne le système à lui-même et l'on demande de trouver son mouvement. On remarquera que les fils restent verticaux.

On néglige la masse des fils et celle de l'axe A. *Le poids du disque est égal au poids* P. *Un fil* OA *a* 3^m *de longueur et doublerait sous l'action d'une tension égale à* 10 *fois le poids* P. *On fera* $g = 10$.

SOLUTION.

Soient z la distance de P à l'horizontale du point O, $OA = y$, θ l'angle dont tourne le disque, $\frac{1}{2}T$ la tension d'un fil OA, S celle de BP, on a

$$S = \frac{1}{4}T,$$

$$T = \frac{4}{3}mg(1 - \cos 5t),$$

$$y = \frac{17}{5} - \frac{2}{5}\cos 5t,$$

$$z = \frac{47}{15} + \frac{10}{3}t^2 - \frac{2}{15}\cos 5t,$$

$$R\theta = -\frac{4}{15} + \frac{10}{3}t^2 + \frac{4}{15}\cos 5t.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une plaque carrée plane et indéformable est suspendue aux quatre sommets d'un carré situé dans un plan horizontal, par quatre fils élastiques, identiques, verticaux et de même longueur dans leur état naturel.*

Un point pesant, qui a le même poids P *que la plaque, repose sur cette plaque et se trouve placé au quart de la droite qui joint le centre du carré à l'un des sommets. Ce quart est compté à partir du centre.*

Ce point pesant est en outre suspendu à un fil élastique, vertical, identique aux précédents, et attaché à un point fixe du même plan horizontal.

Primitivement la plaque est soutenue de manière que

les fils ne soient pas tendus, puis on la laisse s'abaisser lentement jusqu'à ce qu'il y ait équilibre.

Les fils s'allongent proportionnellement à leur tension.

Trouver la tension de chacun d'eux. On suppose qu'ils restent très sensiblement verticaux.

(Novembre 1906.)

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Exposer les théorèmes des vitesses virtuelles et de d'Alembert. Appliquer ces théorèmes à un système contenant des corps solides.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un losange articulé* OABC *formé de quatre tiges identiques homogènes pesantes peut glisser sans frottement dans un plan vertical. Le sommet* O *est fixe et le losange est primitivement en repos de manière que le sommet* C *soit sur la verticale du point* O, *et que l'angle* AOB *soit de* 60°. *La longueur des tiges est de* 1^{m}. *On demande la vitesse que possède le point* C *quand il arrivera au point* O.

La valeur de g est 9,8088; *l'unité de temps la seconde de temps moyen.* (Novembre 1906.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Chute d'un point matériel pesant d'une grande hauteur, en tenant compte de la rotation de la Terre.*

II. *Étude de la suspension à la Cardan.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Deux barres pesantes homogènes identiques* OA, OB *peuvent tourner autour d'une de leurs extrémités fixées au même point* O *dans un plan vertical. Elles sont réunies par un fil élastique* AB *dont on néglige le poids. Ce fil n'est pas tendu dans la position initiale; la longueur commune des barres et du fil est alors de* 1^{m}. *De plus, le fil* AB *est alors horizontal. La tension d'un fil élastique est proportionnelle à son allongement. On demande d'achever de la définir en s'appuyant sur ce que le système abandonné à lui-même arrive sans vitesse de*

façon que le fil AB *soit sur l'horizontale qui passe par le point* O. *Le poids de chacune des tiges est de* 1^{kg}.

(Novembre 1906.)

Épreuve écrite. — *Deux points pesants* M *et* M', *de masses égales, sont reliés par un fil sans masse, flexible et inextensible. Le point* M *décrit sans frottement une verticale fixe, et le point* M' *est assujetti à se déplacer sans frottement dans un plan* P *qui contient cette verticale et tourne autour d'elle d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire* ω. *A l'origine du mouvement,* M *est immobile; la droite* MM' *fait un angle de* 45° *avec la verticale descendante issue de* M; *la vitesse relative de* M' *dans* P, *égale à* v_0, *est perpendiculaire à* M'M *et dirigée par rapport à cette droite du même côté que la verticale ascendante.*

Trouver le mouvement des deux points; montrer que le fil reste tendu pendant le cours du mouvement.

Épreuve pratique. — *On considère le mouvement d'un plan* P *sur un plan fixe* Π.

1° *Démontrer qu'il y a, à chaque instant, un point du plan* P *dont l'accélération est nulle. On appelle ce point* centre des accélérations.

2° *On suppose que, lorsque* P *se déplace sur* M, *le centre des accélérations reste fixe dans* P, *tandis que le centre instantané décrit une droite fixe de* Π.

Trouver la trajectoire du centre des accélérations sur le plan Π *et celle du centre instantané sur* P.

(Novembre 1906.)

Poitiers.

Épreuve théorique. — I. *Un angle droit se meut de façon qu'un de ses côtés demeure tangent à un cercle, tandis que l'autre est tangent à une ellipse concentrique : trouver dans ce mouvement les deux courbes qui roulent sans glisser l'une sur l'autre.*

II. *Mouvement relatif d'un point matériel pesant à la surface de la Terre sous l'influence d'une résistance de milieu proportionnelle à la vitesse, en tenant compte de la rotation terrestre* ω.

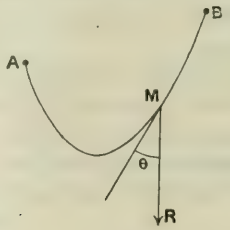
Note. — *On supposera que le mobile ne sort pas d'une région où l'on peut regarder son poids (résultante de l'attraction et de la force centrifuge) comme constant en grandeur et en direction, et l'on négligera les puissances de ω d'indice supérieur à 2.*

Épreuve pratique. — *Une chaîne homogène pesante de longueur $2l$ et de poids* P *est fixée par ses extrémités en deux points* A *et* B *d'un même plan horizontal dont la distance est $2a$. Le système étant en équilibre, on fixe au point le plus bas de la chaîne un poids p très petit par rapport à* P ; *calculer en première approximation les modifications de la figure d'équilibre.*

(Novembre 1906.)

Toulouse.

Épreuve écrite. — I. *Trouver la figure d'équilibre d'un fil flexible inextensible homogène, attaché à ses deux extrémités* A *et* B, *et dont tous les points sont soumis à des*



forces parallèles R *exprimées par la formule*

$$R = a \sin^m \theta,$$

θ *étant l'angle aigu que fait la direction de la force avec la tangente à la courbe; a et m sont des constantes. Montrer que, si l'on désigne par ρ le rayon de courbure en un point, on a la relation*

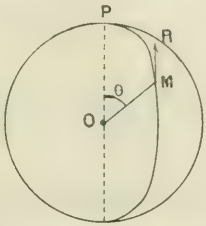
$$R\rho \sin^2\theta = \text{const.}$$

Calculer la tension en chaque point et examiner les cas

particuliers suivants :

$m = 0, \quad m = 1, \quad m = -1, \quad m = -2, \quad m = -3.$

II. *Un point matériel* M *est assujetti à rester sur une sphère dont un point fixe* P *est considéré comme pôle, et il est sollicité par une seule force* R *dirigée à chaque instant suivant la tangente au méridien* MP *et du côté de* P ;



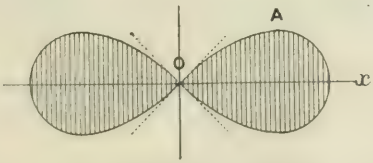
elle est inversement proportionnelle au carré du cosinus de la latitude et, par conséquent, exprimée par la formule

$$R = \frac{m\mu}{\sin^2\theta},$$

θ *représentant l'angle* MOP, m *la masse et* μ *un coefficient numérique. Déterminer le mouvement du point* M *en supposant que la vitesse initiale est tangente au parallèle passant par la position initiale du mobile.*

Calculer la pression exercée sur la surface.

Épreuve pratique. — *Une plaque mince pesant* 10^{kg} *a la*



forme d'une lemniscate représentée en coordonnées polaires par l'équation

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\omega,$$

où $a = 0^m,5$.

1° *Calculer le moment d'inertie de la plaque autour de l'axe polaire* Ox.

2° *En supposant que cette plaque soit animée, autour de cet axe* Ox, *d'une rotation uniforme de 24 tours par seconde, trouver la force de percussion appliquée au point* A *de la plaque le plus éloigné de l'axe, perpendiculairement à la plaque, capable de la ramener au repos.*

(Novembre 1906.)

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

Paris.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° *Démontrer qu'une fonction uniforme d'une variable ayant partout à distance finie le caractère d'une fonction rationnelle ne peut avoir plus de deux périodes;*

2° *Démontrer qu'une fonction uniforme de deux variables, ayant partout à distance finie le caractère d'une fonction rationnelle, ne peut avoir plus de quatre paires de périodes. La démonstration devra mettre en évidence un cas particulier où le théorème est en défaut.*

II. 1° *Combien une fonction thêta d'ordre m à une variable a-t-elle de racines dans un parallélogramme de périodes?*

2° *On considère la fonction thêta à deux variables, avec les périodes* 2π *et* $2\pi i$ *pour* x *et* y, *satisfaisant aux équations*

$$\Theta(x+\alpha,\ y+\beta) = e^{dx+A}\,\Theta(x, y),$$
$$\Theta(x+\alpha',\ y+\beta') = e^{cy+A'}\,\Theta(x, y),$$

d et c étant entiers et la condition

$$c\beta - d\alpha' = 0$$

étant vérifiée. En désignant par $\Theta(x, y)$ *et* $\eta(x, y)$ *deux de ces fonctions prises arbitrairement, trouver le nombre*

des racines communes aux deux équations

$$\theta(x, y) = 0, \qquad \eta(x, y) = 0$$

dans un prismatoïde de périodes.

Épreuve pratique. — *Trouver les résidus de l'intégrale double de fonction rationnelle*

$$\int\int \frac{x\,dx\,dy}{y^2 - x^4 - 1}.$$

(Octobre 1905.)

Paris.

Épreuve théorique. — I. *Étant donné le tableau de quatre périodes géométriquement distinctes relatif aux variables x et y,*

$$\begin{array}{c|cccc|} x & 2\pi i & 0 & \alpha & \alpha' \\ y & 0 & 2\pi i & \beta & \beta' \end{array}$$

on considère les équations

$$f(x + 2\pi i,\ y) = f(x, y); \qquad f(x, y + 2\pi i) = f(x, y),$$
$$f(x + \alpha, y + \beta) = e^{hx} f(x, y); \quad f(x + \alpha', y + \beta') = e^{ky} f(x, y),$$

où h et k sont des nombres entiers. A quelle condition existe-t-il des fonctions entières de x et y satisfaisant à ces quatre équations?

Cette condition étant remplie, quelle est la forme de ces fonctions et combien y en a-t-il de linéairement distinctes? Quelles sont aussi les inégalités à adjoindre à la condition trouvée?

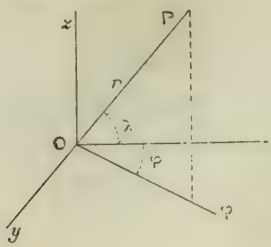
II. *Trouver les résidus de l'intégrale double de fonction rationnelle*

$$\int\int \frac{dx\,dy}{x^2 - ay^2 - by - c},$$

a, b, c, étant trois constantes.

Épreuve pratique. — *Quand une surface est donnée en*

coordonnées polaires par l'expression de r en fonction des



angles λ et φ, quelle est l'expression de l'élément d'aire sur cette surface?

Appliquer la formule trouvée à la recherche de l'aire de la surface fermée représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2-y^2).$$

On commencera par se rendre compte de sa forme. (a est une ligne donnée). (Juillet 1905.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2029.

(1905, p. 576; 1906, p. 430.)

On projette un point M *d'une ellipse en* P *et* Q *sur les diamètres conjugués égaux. Montrer que le milieu* I *de* PQ *est situé sur la normale à l'ellipse en* M *et que le point de Frégier relatif à* M *est le symétrique de* M *par rapport à* I. (E.-N. Barisien.)

SOLUTIONS GÉOMÉTRIQUES

Par M. A. Mannheim.

La première partie de cet énoncé a déjà été proposée en 1842 dans les *Nouvelles Annales*. Elle fait l'objet de la

question 3 insérée dans le Tome Ier de ce Recueil sous la signature de Steiner. Le même Volume renferme deux solutions analytiques de cette question, pages 142 et 429.

PREMIÈRE SOLUTION.

L'ellipse est le lieu des points dont la somme des carrés des distances à deux droites est constante. On a donc

$$\overline{MP}^2 + \overline{MQ}^2 = \text{const.};$$

d'où

$$MP\,d.MP + MQ\,d.MQ = 0.$$

Prenons le point M′ de l'ellipse infiniment voisin de M et abaissons la perpendiculaire M′P′, on a

$$d.MP = MM' \cos MM'P',$$

de même pour $d.MQ$. Portant ces valeurs dans la relation précédente et supprimant le facteur MM′, on trouve que les projections de MP et de MQ sur la tangente en M sont égales et de signes contraires. Il résulte de là que la normale en M passe par le milieu de PQ.

DEUXIÈME SOLUTION.

Menons les parallèles MB, MC aux diamètres conjugués égaux. Appelons R, T les points où ces diamètres sont coupés par la tangente en M. Les produits $OC \times OT$ et $OB \times OR$ étant égaux aux demi-diamètres conjugués égaux sont égaux. On peut alors écrire

$$\frac{OT}{OR} = \frac{OB}{OC}.$$

Par rapport au grand axe de l'ellipse prenons les symétriques B′, M′, C′ des points B, M, C. La dernière égalité peut s'écrire

$$\frac{OT}{OR} = \frac{OB'}{OC'},$$

ce qui montre que B′C′ est parallèle à la tangente en M.

Les triangles MBP, MCQ sont semblables et donnent

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{MB}{MC},$$
$$= \frac{B'M'}{B'O'}.$$

Les triangles MPQ, OB'M' ont les angles PMQ, M'B'O égaux et les côtés qui comprennent ces angles proportionnels, ils sont alors semblables. En outre, comme ils ont leurs côtés homologues perpendiculaires, la droite MI qui passe par le milieu de PQ est perpendiculaire à B'C' qui passe par le milieu de OM'.

La droite MI est alors normale à l'ellipse, puisque nous avons vu que B'C' est parallèle à la tangente en M.

TROISIÈME SOLUTION.

Les diamètres conjugués de l'ellipse forment un faisceau en involution. Il en est de même des perpendiculaires abaissées de M sur ces diamètres. Prenons, dans le cercle de diamètre OM, les cordes sous-tendues par les couples de rayons homologues de ce dernier faisceau, nous aurons des droites qui passent par un même point. Parmi ces cordes, il y a la droite PQ, puis le diamètre VU qui joint les pieds des perpendiculaires MV, MU abaissées de M sur les axes de l'ellipse, et enfin la normale en M, car cette droite joint les pieds des perpendiculaires abaissées de M sur OM et sur son diamètre conjugué qui est parallèle à la tangente en M à l'ellipse. D'après cela, si I est le point de rencontre de PQ et de VU, la droite MI est normale à l'ellipse.

Les droites MP, MQ sont également inclinées sur MU. Le point U est alors le milieu de l'arc PUQ et le diamètre VU est perpendiculaire à PQ, le point I est alors le milieu de PQ.

Il reste encore à traiter la deuxième partie de l'énoncé.

Prolongeons MV jusqu'à sa rencontre en M'' avec l'ellipse. La droite M'M'' coupe la normale MI au point de Frégier relatif à M. Ce point est le symétrique de M par rapport à I, puisque U est le milieu de MM' et que la droite UV est parallèle à M'M''.

2036.

(1906, p. 96.)

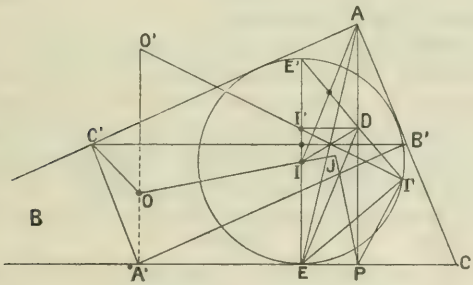
Soient ABC *un triangle*, O *et* I *les centres des cercles circonscrit et inscrit à ce triangle*, B′ *et* C′ *les milieux des côtés* AC *et* AB. *La droite symétrique de* OI, *par rapport à la droite* B′C′, *passe par le point de contact* Γ *du cercle des neuf points du triangle* ABC *et du cercle inscrit à ce même triangle.* (R. B.)

SOLUTION

Par M. A. Mannheim.

Le cercle inscrit au triangle ABC (*fig.* 1) a pour centre I,

Fig. 1.



il touche BC au point E, dont le symétrique, par rapport à I, est E′. Pour déterminer le point de contact Γ du cercle des neuf points de ABC et du cercle inscrit à ce triangle, j'ai fait connaître ce résultat [1] : la droite qui joint E′ au milieu de AI coupe le cercle inscrit au point Γ, qui est le point de Feuerbach.

Soit D le point de rencontre de E′Γ et de la hauteur AP, les angles DΓE, DPE étant droits, les points D, Γ, P, E sont sur un cercle dont le centre est le milieu de DE. Ce cercle

---

[1] *Bulletin des Sciences mathématiques et physiques élémentaires*, 1902, p. 95.

coupe EE′ au point I′, quatrième sommet du rectangle EPDI′, l'angle I′ΓP est droit. Le segment AD est égal et parallèle à E′I, et alors aussi à IE. Les droites AE, ID se coupent mutuellement en parties égales; on voit ainsi que I′ est le symétrique de I, par rapport à B′C′, droite qui passe par le milieu de AE.

Ainsi, *la perpendiculaire* ΓI′ *à* ΓP *coupe* EE′ *au point* I′ *symétrique du centre* I *par rapport à* B′C′.

Prolongeons ΓI′ jusqu'à sa rencontre O′ avec la perpendiculaire à BC élevée du milieu A′ de ce côté. Les points O′, A′, P, Γ appartiennent à un cercle, mais A′, P, Γ sont sur le cercle des neuf points du triangle ABC; donc O′ est aussi sur ce cercle. Le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC est l'orthocentre du triangle A′B′C′; donc O′ et O sont symétriques par rapport à B′C′.

Ainsi, *la droite* ΓI′, *qui contient le symétrique de* I *par rapport à* B′C′, *contient aussi le point* O′, *symétrique de* O *par rapport à la même droite.*

Le théorème proposé est ainsi démontré. On voit en outre que *la droite* O′I′ *est perpendiculaire en* Γ *à la droite* ΓP.

Remarques. — 1° Par rapport à B′C′, la droite symétrique de O′I′ est la ligne des centres OI, et la droite symétrique de PΓ est une parallèle à la droite PJ qui elle-même est la symétrique de PΓ par rapport à la hauteur PA. Mais la droite O′I′ est perpendiculaire à PΓ; par suite PJ est perpendiculaire à OI.

Ainsi, *la symétrique de* PΓ, *par rapport à* PA, *est perpendiculaire à la ligne des centres* OI. Inversement, on peut dire : *la perpendiculaire* PJ *abaissée du pied de la hauteur* AP *sur la ligne des centres* OI *a pour symétrique, par rapport à cette hauteur, une droite* PΓ *qui passe par le point de Feuerbach.*

2° Par Γ (*fig.* 2) menons la corde ΓQ du cercle des neuf points parallèlement à BC. On voit tout de suite que la droite A′Q est parallèle à PJ et qu'elle est aussi la symétrique de A′Γ par rapport à la bissectrice de l'angle B′A′C′.

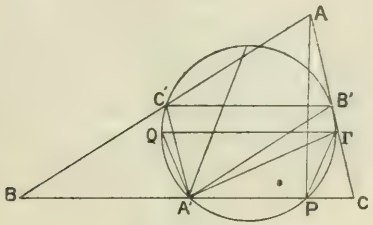
D'après cela, A′Q *donne la direction des diamètres de la parabole tangente aux côtés du triangle* A′B′C′ *et qui a* Γ *pour foyer,* c'est-à-dire que *ces diamètres sont perpendiculaires à* OI.

Mais *le centre* O *est l'orthocentre de* A′B′C′; *donc la*

ligne des centres OI *est la directrice de cette parabole* (¹).

3° Le cercle des neuf points de ABC contient deux points de chacun des côtés de ce triangle. On compte en outre sur ce cercle trois autres points qui sont les milieux des segments compris entre l'orthocentre de ABC et les sommets de ce

Fig. 2.



triangle. On pourrait compter aussi les points tels que O', qui sont les symétriques du centre O par rapport aux côtés du triangle A'B'C' et l'on devrait dire alors *le cercle des douze points*.

Note de la Rédaction. — La question 2036 se trouve aussi résolue par l'article de M. R. Bouvaist (1906, p. 510).

2040.

(1906, p. 142.)

Attachant aux mots de semi-plan *et de* semi-sphère *les sens que leur a donnés Laguerre, démontrer les théorèmes suivants :*

1° *Les cinq semi-sphères qui touchent cinq semi-plans quelconques, pris quatre à quatre, touchent une même semi-sphère.*

2° *Etant données cinq semi-sphères qui touchent une semi-sphère* (S), *il existe, outre* (S), *une semi-sphère qui*

(¹) La droite de Simson de Γ par rapport au triangle A'B'C' est parallèle à OI. Cette propriété a été énoncée par M. Ch. Michel, et j'en ai donné une démonstration directe (*Bulletin élémentaire*, 1904, p. 291).

touche quatre quelconques d'entre elles. Les cinq semi-sphères ainsi obtenues touchent une même semi-sphère.

(R. B.)

SOLUTION

Par M. Thié.

Un plan peut être considéré comme une sphère de rayon infini qui touche la sphère réduite au plan de l'infini compté deux fois. La première partie de l'énoncé n'est donc qu'un cas particulier de la seconde, qu'il suffit de démontrer.

Appliquons à la figure la transformation de Sophus Lie. Cette transformation fait correspondre à la sphère, de centre (x, y, z) et de rayon R, la droite dont les équations sont

$$X = aZ + p,$$
$$Y = bZ + q,$$

par les formules

$$a = x + yi, \qquad b = z + R,$$
$$q = x - yi, \qquad p = R - z.$$

A une sphère, dont le rayon est donné seulement en valeur absolue, correspondent deux droites, mais à une *semi-sphère*, dont le rayon a un signe bien déterminé, correspond une droite unique.

Comme la transformation change deux semi-sphères tangentes en deux droites qui se coupent, le théorème à démontrer est transformé en le suivant :

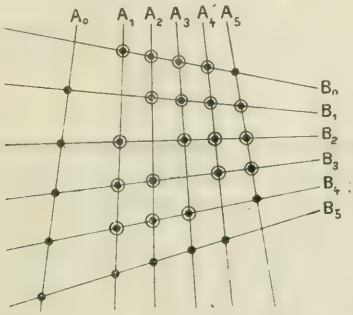
Soient cinq droites quelconques A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 *qui rencontrent une même droite* B_0. *Il existe, outre* B_0, *une droite* B_1 *qui rencontre les quatre droites* A_2, A_3, A_4, A_5; *une droite* B_2 *qui rencontre les quatre droites* A_1, A_3, A_4, A_5; *etc. Les cinq droites* B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 *rencontrent une même droite* A_0.

Les droites A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 se rencontrent en 25 points, comme l'indique la figure ci-après.

Il existe une surface du troisième ordre (Σ) qui passe par les 19 points entourés sur la figure d'un petit cercle. Cette surface contient les 11 droites considérées, comme on le voit

immédiatement (par exemple, contenant quatre points de la droite A_1, elle la contient tout entière, etc.).

Ceci posé, il existe, outre A_1, une droite qui rencontre B_2, B_3, B_4 et B_5. Désignons-la par A_0. Je dis que A_0 [qui appartient évidemment à (Σ)] rencontre B_1. En effet, s'il en est



autrement, considérons la section de (Σ) par le plan $(B_1 A_2)$. Cette section, comprenant les deux droites B_1 et A_2, doit comprendre une droite C_2, et A_0 qui ne rencontre ni B_1 ni A_2 doit rencontrer C_2. Il en est de même de A_1. Autrement dit, il existe sur (Σ) une droite C_2 qui rencontre A_0, A_1 et B_1. On reconnaît de même l'existence de trois autres droites de (Σ), C_3, C_4 et C_5, qui rencontrent toutes A_0, A_1 et B_1.

Ces quatre droites C_2, C_3, C_4, C_5 appartiennent à la quadrique (Q) déterminée par les droites A_0, A_1 et B_1.

(Q) et (Σ) auraient donc en commun les *sept* droites A_0, A_1, B_1, C_2, C_3, C_4, C_5, ce qui est impossible, si (Q) ne fait pas partie de (Σ). Comme on suppose que (Σ) est une véritable surface du troisième ordre, l'hypothèse faite est inadmissible et A_0 rencontre B_1. Le théorème est ainsi démontré.

La configuration constituée par les douze droites $A_0, \ldots, A_6$ et $B_0, \ldots, B_6$ est bien connue sous le nom de *double-six de Schläfli*.

2041.

(1906, p. 192.)

Démontrer l'identité suivante, relative au triangle

arithmétique :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & \ldots & n \\ 3 & 6 & 10 & \ldots & . \\ 4 & 10 & 20 & \ldots & . \\ . & .. & .. & \ldots & . \\ n & .. & .. & \ldots & . \end{vmatrix} = n.$$

(G. Fontené.)

SOLUTION

Par M. P. Sondat.

Dans le déterminant Δ_n remplaçons les horizontales successives H_1, H_2, H_3, H_4, ... par H_1, $H_2 - H_1$, $H_3 - 2H_2 + H_1$, $H_4 - 3H_3 + 3H_2 - H_1$, ..., et nous aurons

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & n \\ 1 & 3 & 6 & 10 & \ldots & . \\ 0 & 1 & 4 & 10 & \ldots & . \\ 0 & 0 & 1 & 5 & \ldots & . \\ . & . & . & .. & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{vmatrix}.$$

Dans ce nouveau déterminant opérons de même sur les verticales V_1, V_2, V_3, V_4, ..., et il viendra

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & . & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \ldots & . & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \ldots & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \ldots & . & 0 \\ . & . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

ou

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}.$$

Comme

$$n = 2(n-1) - (n-2),$$

si l'identité a lieu pour $n-2$ et $n-1$, elle aura lieu aussi pour n. Or $\Delta_2 = 2$, $\Delta_3 = 3$, et par suite

$$\Delta_4 = 4, \qquad \Delta_5 = 5, \qquad \ldots, \qquad \Delta_n = n.$$

C. Q. F. D.

[A1a]

SUR UN CERTAIN DOMAINE HOLOÏDE, COMPLET ET BIEN DÉFINI;

PAR M. LÉON AUTONNE.

INTRODUCTION.

On sait que les polynomes $f(z) = f(z_1, \ldots, z_n)$, à n variables *indépendantes,* se comportent, *au point de vue formel,* comme des nombres entiers, en ce qui concerne les quatre opérations élémentaires (addition, soustraction, multiplication, division) et la divisibilité.

On peut de même donner du p. g. c. d. (plus grand commun diviseur) une définition identique pour les nombres entiers et les polynomes f.

La voici : *Le p. g. c. d.* D *de deux quantités (entiers ou polynomes)* A *et* B *est :* 1° *Un diviseur commun à* A *et* B; 2° *Divisible par tous les diviseurs communs à* A *et* B.

D existe toujours, pour tout choix de A et B, et s'obtient par un nombre fini d'opérations, d'une nature déterminée.

Pour exprimer toutes ces diverses propriétés, nous dirons avec M. König (Julius), dans son livre, *Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Grössen* (Teubner, 1903), que les polynomes f constituent, comme les nombres entiers, *un domaine holoïde, complet et bien défini* (ein echter holoider, vollständiger und wohldefinierter Bereich).

L'algèbre formelle de pareils domaines coïncide avec l'arithmétique ordinaire, à cause de l'existence du p. g. c. d. Ainsi :

Tout facteur irréductible (divisible par lui-même et par l'unité seulement) est aussi premier (ne divise pas un produit de deux facteurs sans diviser au moins un des facteurs);

La décomposition en facteurs premiers est toujours possible et d'une seule façon, etc.

Si les variables, qui figurent dans les polynomes f, au lieu d'être indépendantes, sont liées par une ou plusieurs relations algébriques, le p. g. c. d. n'existe plus en général, et le domaine est incomplet. L'algèbre des domaines incomplets est incomparablement plus compliquée et difficile.

Il y a donc intérêt à signaler un domaine de polynomes, qui reste complet, malgré l'existence d'une relation algébrique entre les variables.

Voici le domaine dont il s'agit :

C'est celui des polynomes homogènes

$$F(z) = F(z_1, \ldots, z_n),$$

les z étant liées par la relation quadratique homogène $\omega(z) = 0$, où

$$\omega(z) = z_1^2 + \ldots + z_n^2,$$

c'est-à-dire une forme quadratique quelconque, à déterminant non évanouissant.

Dans le présent travail, j'établis qu'un pareil domaine est holoïde, complet et bien défini.

Notons cependant que l'on a supposé n supérieur à 4. Le cas de 4 et de 3 variables homogènes appelle des recherches spéciales.

Dans les notations et les raisonnements, on trouvera

une certaine analogie avec la deuxième Partie de mon Mémoire *Sur les Formes mixtes* (Paris, Gauthier-Villars; Lyon, A. Rey, 1905), inséré aux *Annales de l'Université de Lyon*.

Comme application de la présente théorie, je signalerai le champ de la géométrie réglée.

Les six coordonnées homogènes p d'une droite sont six variables, liées uniquement par la relation quadratique

$$\omega(p) = p_1 p_2 + p_3 p_4 + p_5 p_6 = 0.$$

Il n'est donc pas douteux que le théorème du présent Mémoire ne trouve son emploi dans les recherches sur les complexes algébriques de droites

$$F(p_1, \ldots, p_6) = 0.$$

GÉNÉRALITÉS.

1° On renverra au livre de M. König (Julius), *Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Grössen* (Teubner, 1903) pour explications détaillées et précises sur les *domaines* et notamment sur les domaines *holoïdes*. On ne rappellera ci-après que les principes essentiels de la matière et encore très rapidement.

2° Soit Ω un système de quantités $x_1, x_2, \ldots$. Définissons deux opérations à effectuer sur les x, l'addition et la multiplication.

L'addition est :

Univoque :	$x_1 + x_2$ bien déterminé et unique;
Commutative :	$x_1 + x_2 = x_2 + x_1$;
Associative :	$x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$.

Elle admet un module, le zéro, tel que $x_1 + 0 = x_1$ pour tout x_1.

La multiplication est :

Univoque :	$x_1 x_2$ bien déterminé et unique;
Commutative :	$x_1 x_2 = x_2 x_1$;
Associative :	$x_1(x_2 x_3) = (x_1 x_2) x_3)$;
Distributive :	$x_1(x_2 + x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3$.

Elle admet un module (1 ou unité absolue) tel que $1 x_1 = x_1$ pour tout x_1.

Si la somme et le produit de deux *termes* x_1 et x_2 du système Ω font encore partie de Ω, Ω devient un *domaine* (Bereich).

L'addition et la multiplication peuvent, d'ailleurs, à condition de suivre les règles ci-dessus, *être définies à volonté*.

3° Le domaine Ω devient *holoïde* (echter holoider Bereich) si, en sus des propriétés précédentes :

I. En additionnant, autant de fois qu'on veut, l'unité absolue avec elle-même on n'obtient jamais zéro (l'unité absolue fait partie de Ω);

II. Pour un choix convenable de termes x_1 et x_2 de Ω, l'équation

$$x_1 \xi = x_2$$

n'a pas, dans Ω, de solution ξ.

Le mot *holoïde* rappelle que le domaine Ω se comporte comme celui des nombres *entiers* ordinaires.

4° Dans Ω, le terme *a divise* le terme c, s'il existe, dans Ω, un terme b tel que $c = ab$.

Deux termes a et b de Ω ont un p. g. c. d. (plus grand commun diviseur) d, si le terme d de Ω :

I. Divise a et b;

II. Est divisible par tout diviseur commun à a et b.

En général, dans un domaine holoïde, pour deux termes pris à volonté, le p. g. c. d. n'existe pas. Le domaine est *incomplet*.

Le domaine est *complet* (vollständig), si, *pour tout choix* des termes a et b, leur p. g. c. d. existe.

Le domaine holoïde et complet Ω est, en outre, *bien défini* (wohldefiniert), si l'on possède une méthode pour obtenir le p. g. c. d. d de a et b, en effectuant sur a et b *un nombre fini d'opérations d'une nature déterminée*.

5° Dans le domaine holoïde Ω, tout diviseur de l'unité absolue est une unité. Est dit *irréductible* tout terme qui n'est divisible que par lui-même et les unités. Est *premier* tout terme qui ne peut diviser un produit de deux facteurs sans en diviser au moins un. Tout facteur premier est irréductible, mais la réciproque n'est vraie que pour les domaines complets.

6° Ces derniers suivent les *règles formelles* de l'arithmétique ordinaire en ce qui concerne :

Les quatre opérations élémentaires;

La divisibilité;

Le p. g. c. d.;

La décomposition en facteurs premiers, etc.

Les choses sont incomparablement plus compliquées pour les domaines incomplets. Il est, par suite, très intéressant de reconnaître si un domaine holoïde donné est ou non complet et bien défini.

7° Est complet, par exemple, le domaine des polynomes à n variables *indépendantes* $x_1, \ldots, x_n$. Pour

préciser cette notion de variables indépendantes, je dirai : soit un polynome

$$f = f(x_1, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots),$$

pris à volonté, mais avec un au moins des coefficients a différent de zéro ; on doit pouvoir trouver au moins un système de valeurs

$$x_1 = \xi_1, \qquad \ldots, \qquad x_n = \xi_n,$$

tel que

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_n; a_1, a_2, \ldots) \neq 0.$$

Un polynome nul, à variables indépendantes, est donc nul identiquement, c'est-à-dire a tous ses coefficients nuls.

8° Le domaine, au contraire, est incomplet, en général, quand les variables sont liées par une ou plusieurs relations algébriques.

9° L'objet du présent travail est précisément de montrer que le domaine holoïde Ω des polynomes homogènes $F(z) = F(z_1, \ldots, z_n)$ *reste complet et bien défini*, lorsqu'on introduit, entre les n variables, une relation quadratique

$$\omega(z) = z_1^2 + \ldots + z_n^2 = 0.$$

10° Je suppose connue du lecteur la théorie :
Des *Tableaux*

$$[a_{\lambda\mu}], \qquad \{\lambda = 1, 2, 3, \ldots, L; \ \mu = 1, 2, \ldots, M\},$$

à L lignes et M colonnes

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1M} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & a_{\lambda\mu} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{L1} & \ldots & a_{LM} \end{matrix} \right\| ;$$

Des *matrices* L-*aires* ou Tableaux carrés, $L = M$:

Des collinéations, des formes bilinéaires, etc.

On consultera par exemple le livre de M. Pascal, *Die Determinanten* (Leipzig, Teubner, 1900).

CHAPITRE I.

Domaine holoïde Ω *des formes* $F(z)$.

1° Soient $z_1, \ldots, z_n$ des variables indépendantes et $F\binom{m}{z}$ un polynome *homogène*, de degré m par rapport aux z. Si l'on a soin d'additionner ensemble seulement des polynomes F de même degré, les F sont les termes d'un domaine E_n.

Si $m = 0$, on a une constante C. Si $C = 1$, on a l'unité absolue, module de la multiplication ; si $C = 0$, on a le zéro, module de l'addition.

E_n est holoïde, car, par exemple, l'équation

$$z_1 \zeta = z_2^2$$

ne possède pas, dans E_n, de solution ξ.

Le domaine E_n est-il complet et bien ordonné ?

Oui, et voici pourquoi :

Le p. g. c. d. $D(z)$ de deux termes $A(z)$ et $B(z)$ s'obtient toujours par les procédés de l'algèbre élémentaire.

Reste à montrer que $D(z)$ appartient à F_n, c'est-à-dire est homogène. Si D n'est pas homogène, on écrira pour D

$$D = D_0 + D_1 + \ldots + D_k$$

$\{D_0$ étant homogène avec le degré μ_0, D_1 avec le degré $\mu_1, \ldots, \mu_0 < \mu_1 < \ldots < \mu_k\}$, et, pour le quo-

tient $K = A : D$,

$$K = K_0 + K_1 + \ldots + K_g$$

{ K_0 étant homogène avec le degré λ_0, K_1 avec le degré $\lambda_1, \ldots$; $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_g$ }.

Le produit $A = KD$ contiendra sûrement les deux expressions $K_0 D_0$ et $K_g D_k$ de degrés inégaux $\lambda_0 + \mu_0$ et $\lambda_g + \mu_k$, $\lambda_0 < \lambda_g$, $\mu_0 < \mu_k$; cela est absurde; K et D sont homogènes.

2° Nommons $\omega(z)$ une forme quadratique n-aire, à déterminant non nul. On peut toujours écrire

$$(1) \qquad \omega = z_1^2 + \ldots + z_n^2,$$

ou encore, ou bien

$$(2) \qquad \omega = z_1 z_2 + z_3 z_4 + \ldots + z_{2n'-1} z_{2n'},$$

si $n = \text{pair} = 2n'$;

Ou bien, si $n = \text{impair} = 2n' + 1$,

$$(3) \qquad \omega = z_1 z_2 + \ldots + z_{2n'-1} z_{2n'} + z_{2n'+1}^2.$$

En effet ($i^2 + 1 = 0$),

$$z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + iz_2)(z_1 - iz_2) \ldots.$$

Posons $\omega = z_1 z_2 - \zeta$; la forme quadratique

$$-\zeta = z_3 z_4 + \ldots,$$

à $n - 2$ variables, a encore son déterminant non nul.

Si $n = 4$ ou 3, il vient $-\zeta = z_3 z_4$ ou z_3^2. ζ n'est plus irréductible.

Jusqu'à nouvel avis, on prendra $n \geq 5$ et ζ irréductible.

3° Altérant la synonymie habituelle des mots *forme*

et *polynome homogène,* je dirai que le polynome homogène $F\left(\begin{matrix} m \\ z \end{matrix}\right)$, terme du domaine E_n, devient une *forme*, si, au lieu d'être indépendantes, les n variables z sont liées par la relation $\omega(z) = 0$.

Les z sont alors les coordonnées homogènes d'un point z pris sur une quadrique Z, dans un espace à $n - 1$ dimensions. Sur Z, il y a $n - 1$ variables indépendantes $z_2, \ldots, z_n$, la $n^{\text{ième}}$ z_1 s'obtenant par la formule

$$z_1 = \frac{\zeta}{z_2} = -\frac{z_3 z_4 + \ldots}{z_2}.$$

Des notations telles que $F^{(1)}$, $F^{(12)}$, ... indiquent que dans la forme F manque la variable z_1, ou manquent les deux variables z_1 et z_2, etc.

Comme les $n - 1$ variables de $F^{(1)}$ sont indépendantes, les $F^{(1)}$ constituent un domaine tel que E_n (1°), c'est-à-dire un domaine E_{n-1}.

De là une conséquence évidente : *Une forme* $F^{(1)}$, *nulle pour tout point z de la quadrique* Z, *est nulle identiquement, c'est-à-dire a tous ses*

$$\varphi(m) = \frac{(m + n - 2)!}{(n - 2)!\, m!}$$

coefficients nuls.

4° Théorème. — *Si une forme* $F\left(\begin{matrix} m \\ z \end{matrix}\right)$ *est nulle pour tout point z de* Z, *le polynome homogène* F *est divisible par* ω.

Divisons le polynome, en z_1, $z_2^m F\left(\begin{matrix} m \\ z \end{matrix}\right)$ par le binome en z_1, $\omega = z_2 z_1 - \zeta$. Il viendra l'identité

$$(1) \qquad z_2^m F\left(\begin{matrix} m \\ z \end{matrix}\right) = \omega\left(\begin{matrix} 2 \\ z \end{matrix}\right) Q\left(\begin{matrix} 2m - 2 \\ z \end{matrix}\right) - R^{(1)}\left(\begin{matrix} 2m \\ z \end{matrix}\right).$$

Le reste $R^{(1)}$ de la division ne contient plus z_1 et est une expression $F^{(1)}$ du domaine E_{n-1} (3°).

En un point z de Z, $\omega = 0$ et, par hypothèse, $F = 0$. Donc, en vertu de l'identité (1), $R^{(1)} = 0$, et (3°, *in fine*) $R^{(1)}$ est identiquement nulle. Il reste l'identité

$$z_2^m F = \omega Q,$$

z_2 ne divise pas ω; z_2^m doit diviser Q. Si

$$P\binom{m-2}{z} = Q : z_2^m,$$

il vient

$$F\binom{m}{z} = \omega\binom{2}{z} P\binom{m-2}{z}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

5° Pour exprimer que ω divise F, on écrira

$$F \equiv 0 \qquad (\text{mod}\ \omega),$$

et l'on dira que F est congrue à zéro suivant le module ω.

Deux formes de même degré $A\binom{m}{z}$ et $B\binom{m}{z}$ sont *équivalentes* ou *indistinctes à l'équivalence près,* si elles sont égales pour tout point z de Z. Il faut et il suffit pour cela que $A - B \equiv 0$ (mod ω), ou $A \equiv B$ (mod ω), c'est-à-dire

$$B = A + \omega P\binom{m-2}{z}.$$

Ne sont à étudier pour des formes A, B, ... que les propriétés *permanentes,* qui subsistent quand on remplace, par exemple, A par une quelconque de ses formes équivalentes.

6° Je suis maintenant à même d'introduire le domaine Ω, objet principal des présentes recherches.

7° Les termes de Ω sont les formes $F(z)$, dont chacune n'est définie qu'à l'équivalence près (5°). Ainsi l'égalité ordinaire de l'Algèbre est remplacée par la congruence suivant le module ω.

L'addition (entre formes du même degré) et la multiplication, dans le domaine Ω, sont les opérations de même nom en algèbre ordinaire, mais à l'équivalence près.

Le domaine E_{n-1} des expressions $F^{(1)}$ (3°) est contenu dans Ω.

Quelle est l'unité absolue dans Ω?

Raisonnant sur un terme $F^{(1)}$ de Ω, on voit que cette unité absolue ne peut être que $1 = F\begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}$, forme de degré zéro. Le zéro, module de l'addition, est toute forme divisible par ω.

8° Lemme. — *Soient* $A\begin{pmatrix} \alpha \\ z \end{pmatrix}$ *et* $B\begin{pmatrix} \beta \\ z \end{pmatrix}$ *deux formes, avec* $AB \equiv 0 \pmod{\omega}$, *mais* $A \not\equiv 0 \pmod{\omega}$. Alors $B \equiv 0 \pmod{\omega}$.

On a, comme au 4°,

$$A z_2^{\alpha} = \omega \mathcal{A}\begin{pmatrix} 2\alpha - 2 \\ z \end{pmatrix} + \mathfrak{A}_1\begin{pmatrix} 2\alpha \\ z \end{pmatrix},$$

$$B z_2^{\beta} = \omega \mathcal{B}\begin{pmatrix} 2\beta - 2 \\ z \end{pmatrix} + \mathfrak{B}_1\begin{pmatrix} 2\beta \\ z \end{pmatrix};$$

$$z_2^{\alpha+\beta} AB \equiv \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 \pmod{\omega}.$$

$\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{B}_1$ sont des expressions $F^{(1)}$ (3°) pour lesquelles la congruence $(\bmod\, \omega)$ et l'égalité ordinaire se confondent.

Donc $AB \equiv 0 \pmod{\omega}$ entraîne $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 = 0$. $\mathfrak{A}_1 \neq 0$, sans quoi ω diviserait A; on aurait, contrairement à l'hypothèse, $A \equiv 0 \pmod{\omega}$. Il vient

$$\mathfrak{B}_1 = 0, \quad B \equiv 0 \pmod{\omega}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

9° D'autre part, l'équation $AX \equiv B \pmod{\omega}$, où A et B sont deux formes données et X une forme inconnue, n'a pas toujours de solutions dans Ω. Il en est ainsi, par exemple, pour $A = z_1$, $B = z_2^2$.

De tout cela résulte que *le domaine* ω *est holoïde.*

10° La forme $A\binom{m}{z}$ *divise* $(\text{mod}\,\omega)$ la forme $C\binom{m+m'}{z}$, s'il existe une forme $B\binom{m'}{z}$ telle que

$$C \equiv AB \pmod{\omega}.$$

Une forme est *irréductible* $(\text{mod}\,\omega)$, si elle n'est divisible $(\text{mod}\,\omega)$ que par elle-même ou une constante.

Une forme-facteur est *première* $(\text{mod}\,\omega)$, si, divisant $(\text{mod}\,\omega)$ un produit de deux facteurs, elle divise $(\text{mod}\,\omega)$ au moins l'un d'eux.

11° Soient quatre formes A, B, C, D de degrés α, β, γ, δ. Les deux *fractions*

$$\frac{B}{A} \quad \text{et} \quad \frac{D}{C}$$

sont *équivalentes* ou congrues $(\text{mod}\,\omega)$

$$\frac{B}{A} \equiv \frac{D}{C} \pmod{\omega},$$

si $AD - BC \equiv 0 \pmod{\omega}$, avec, bien entendu,

$$\alpha + \delta = \beta + \gamma \quad \text{et} \quad A \not\equiv 0, \quad C \not\equiv 0 \pmod{\omega}.$$

L'addition et la multiplication des fractions s'obtiennent par les formules

$$\left.\begin{aligned} \frac{B}{A} + \frac{D}{C} &\equiv \frac{AD + BC}{AC} \\ \frac{B}{A} \times \frac{D}{C} &\equiv \frac{BD}{AC} \end{aligned}\right\} \pmod{\omega}.$$

12° L'objet principal du présent travail est d'établir que le domaine ω est *complet* et *bien défini* (Généralités, 4°).

Il est nécessaire pour cela d'introduire certaines formations, qui seront étudiées au Chapitre suivant.

CHAPITRE II.

Invariants et résiduelles d'une forme $F(z)$.

13° Si un polynome homogène $F\binom{m}{z}$ est divisible par ω, le quotient $Q\binom{m-2}{z} = F : \omega$ est unique et bien déterminé, puisque, en algèbre élémentaire, la division des polynomes, quand elle est possible, est une opération univoque.

Nommons a les $\varphi(m) = \frac{(m+n-1)!}{(n-1)!\,m!}$ coefficients de $F(z;\, a)$ et b les $\varphi(m-2)$ coefficients de $Q(z;\, b)$. L'identité $F = \omega Q$ fournit $\varphi(m)$ relations

$$(1) \qquad a_\lambda = \sum_\mu l_{\lambda\mu} b_\mu,$$

$$\{\lambda = 1, 2, \ldots, \varphi(m);\ \mu = 1, 2, \ldots, \varphi(m-2)\},$$

où les $l_{\lambda\mu}$ sont des entiers nuls ou positifs, lesquels ne dépendent que de m et de n.

Je dis que *le Tableau* $[l_{\lambda\mu}]$ *à* $\varphi(m)$ *lignes et* $\varphi(m-2)$ *colonnes possède son rang maximum* $\varphi(m-2)$.

Si, en effet, ce rang était moindre que $\varphi(m-2)$, on pourrait satisfaire au système (1) *en annulant tous les* a, *un au moins des* b *n'étant pas zéro.*

Q n'étant pas identiquement nul, on aurait, ce qui

est absurde,

$$0 = F = \omega Q.$$

14° L'élimination des $\varphi(m-2)$ lettres b entre les $\varphi(m)$ équations (1), introduira entre les a *exactement*

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}(m) &= \varphi(m) - \varphi(m-2)\\ &= \frac{(m+n-1)!}{(n-1)!\,m!} - \frac{(m+n-3)!}{(n-1)!\,(m-2)!}\\ &= \frac{(m+n-3)!\,(2m+n-2)}{m!\,(n-2)!}\end{aligned}$$

relations linéaires distinctes, savoir

$$0 = \Delta_\alpha(a) = \sum_\lambda a_\lambda d_\alpha, \qquad \{\alpha = 1, 2, \ldots, \mathfrak{M}(m)\},$$

où les $d_{\alpha\lambda}$ sont des nombres entiers réels qui ne dépendent que de m et de n.

Le Tableau $[d_{\alpha\lambda}]$ à $\mathfrak{M}(m)$ lignes et $\varphi(m)$ colonnes a son rang maximum $\mathfrak{M}(m)$, sans quoi les $\mathfrak{M}(m)$ expressions $\Delta_\alpha(a)$ ne seraient plus linéairement distinctes. On peut donc exprimer linéairement tous les $\varphi(m)$ coefficients a à l'aide :

I. Des $\mathfrak{M}(m)$ quantités Δ_α;

II. De $\varphi(m-2)$ paramètres arbitraires

$$a'_\mu, \quad \{\mu = 1, 2, \ldots, \varphi(m-2)\}.$$

Cela permet d'écrire l'identité

$$(9) \qquad F\left(\begin{matrix} m \\ z\,;a \end{matrix}\right) = \sum_\alpha \Delta_\alpha \Phi_\alpha \left(\begin{matrix} m \\ z \end{matrix}\right) + \sum_\mu a'_\mu Q'_\mu \left(\begin{matrix} m \\ z \end{matrix}\right),$$

où les polynomes homogènes Φ_α et Q'_μ sont connus, en vertu du calcul précédent, dès qu'on possède m et n.

15° Les $\mathfrak{M}(m)$ conditions $\Delta_\alpha = 0$ sont nécessaires et suffisantes, quels que soient les paramètres a'_μ, pour que ω divise F.

L'égalité (0) donne, pour $\Delta_\alpha = 0$,

$$\omega Q = \sum_\mu a'_\mu Q'_\mu(z),$$

pour *tout choix* des a'_μ, en particulier, quand on annule tous les a'_μ sauf un. Donc Q'_μ est divisible par ω et (0) devient

$$(1) \qquad F = \omega Q + \sum_\alpha \Phi_\alpha \Delta_\alpha.$$

16° Changeant légèrement les notations, je dirai que :

Tout polynome homogène F *de degré m, à n variables, peut identiquement s'écrire*

$$F = \sum_\alpha a_\alpha \Phi_\alpha + \omega Q,$$

où les constantes a_α, *au nombre* $\mathfrak{M}(m)$, *et les coefficients, au nombre de* $\varphi(m-2)$, *du polynome homogène* Q, *de degré* $m-2$, *changent avec les* $\varphi(m)$ *coefficients de* F, *tandis que les* $\mathfrak{M}(m)$ *polynomes* Φ_α *homogènes de degré m peuvent être choisis une fois pour toutes, dès qu'on s'est donné m et n.*

Les a_α sont les *invariants* du polynome F. Leur évanouissement simultané est la condition nécessaire et suffisante pour que F admette le diviseur ω.

Les $\Phi_\alpha(z)$ sont les formes *résiduelles élémentaires* pour le degré m et le nombre n de variables.

17° La formule (1) du 15° montre que F se confond, à l'équivalence près, avec l'expression $\overline{F} = \sum_{\alpha} a_\alpha \Phi_\alpha$, puisque

$$F \equiv \overline{F} \qquad (\mathrm{mod}\, \omega).$$

Je dirai que la forme $\overline{F}$ est la *résiduelle* de F, les Φ_α étant les *résiduelles élémentaires*.

Dans le domaine Ω, chaque forme F ne figure que par sa résiduelle $\overline{F}$, c'est-à-dire par ses invariants, puisque les résiduelles élémentaires sont fixes pour m et n donnés.

Toute expression

$$\mathfrak{R}_{mn} = \sum_{\alpha} K_\alpha \Phi_\alpha, \qquad K_\alpha = \text{const.}$$

est la résiduelle d'un polynome F, de degré m à n variables, dont les K_α sont les invariants.

18° Si $F = ef + e'f' + \ldots$, les e étant des constantes et les f des formes de degré m, comme F, l'invariant $\alpha^{\text{ième}}$ de F est évidemment

$$e\, a_\alpha + e'\, a'_\alpha + \ldots,$$

a_α étant l'invariant $\alpha^{\text{ième}}$ de f, etc.

Théorème. — *Les $\mathfrak{M}(m)$ résiduelles élémentaires Φ_α sont linéairement indépendantes.*

En effet, admettons qu'on ait

$$\Phi_\alpha = \sum_{\gamma} g_{\alpha\gamma} \Psi_\gamma \begin{pmatrix} m \\ z \end{pmatrix}, \qquad g_{\gamma\alpha} = \text{const.},$$

$\alpha = 1, 2, \ldots, \mathfrak{M}(m); \qquad \gamma = 1, 2, \ldots, M; \qquad M < \mathfrak{M}(m);$

les Ψ_γ étant linéairement indépendantes.

Prenons le polynome $F(z; a)$, aux $\varphi(m)$ coefficients indéterminés a, savoir (16°)

$$F = \omega Q + \sum_{\alpha} a_\alpha \Phi_\alpha = \omega Q + \sum_{\alpha\gamma} \Psi_\gamma a_\alpha g_{\alpha\gamma}$$
$$= \omega Q + \sum_{\gamma} \Psi_\gamma \sum_{\alpha} a_\alpha g_{\alpha\gamma}.$$

Pour rendre F divisible par ω, il n'est pas nécessaire d'écrire, comme l'exige le 14°, entre les a, $\mathfrak{M}(m)$ relations linéaires *distinctes*. Il suffit d'en écrire seulement $M < \mathfrak{M}(m)$, savoir

$$0 = \sum_{\alpha} a_\alpha g_{\alpha\gamma}, \qquad \{\gamma = 1, 2, \ldots, M\},$$

ce qui est absurde.

19° Théorème. — *Pour l'équivalence de deux formes* F *et* G, *de même degré, il faut et il suffit que les invariants correspondants soient égaux, ou les résiduelles* $\overline{F}$ *et* $\overline{G}$ *identiques.*

Soient, en effet, $\{a_\alpha, b_\alpha = \text{invariants}\}$,

$$\overline{F} = \sum_{\alpha} a_\alpha \Phi_\alpha, \qquad \overline{G} = \sum_{\alpha} b_\alpha \Phi_\alpha,$$
$$F \equiv \overline{F}, \qquad G \equiv \overline{G} \qquad (\text{mod}\, \omega).$$

Par hypothèse et en vertu de 18°

$$G - F \equiv \overline{G} - \overline{F} = \overline{(G - F)} \equiv \sum_{\alpha} (a_\alpha - b_\alpha) \Phi_\alpha \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, \omega).$$

Donc $F - G$, pour être $\equiv 0 \,(\text{mod}\, \omega)$, doit avoir tous ses invariants $a_\alpha - b_\alpha$ nuls.

$$b_\alpha = a_\alpha, \qquad \overline{F} = \overline{G}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

20° Soit R une matrice $\mathfrak{M}(m)$-aire, à coefficients constants, $|R| \neq 0$.

La résiduelle $\overline{F} = \sum_{\alpha} a_\alpha \Phi_\alpha$ ne change pas quand on effectue :

Sur les invariants a_α la collinéation R;

Sur les résiduelles élémentaires Φ_α la collinéation R'^{-1}, inverse de la transposée de R.

Les invariants et les résiduelles élémentaires ne sont définis qu'à une collinéation $\mathfrak{M}(m)$-aire près.

21° Soit

$$S = [s_{ij}], \qquad \{i, j = 1, 2, \ldots, n\}, \qquad |S| \neq 0,$$

une matrice n-aire.

Par hypothèse, la collinéation S admet pour invariant absolu la forme quadratique ω. Comme ω, au choix des variables près, est une somme de n carrés, S est, au choix aussi des variables près, une matrice orthogonale.

Posons $z = S[y]$, c'est-à-dire

$$z_i = \sum_j s_{ij} y_j.$$

$$F\begin{pmatrix} m \\ z; a \end{pmatrix} = F(S[y]; a) = \mathfrak{F}\begin{pmatrix} m \\ y; b \end{pmatrix}.$$

On a évidemment

$$[\lambda, \lambda' = 1, 2, \ldots, \varphi(m)],$$

$$b_\lambda = \sum_{\lambda'} p_{\lambda\lambda'} a_{\lambda'}, \qquad b = P[a],$$

$P = [p_{\lambda\lambda'}]$ étant une matrice $\varphi(m)$-aire, dont le coefficient $p_{\lambda\lambda'}$ est, par rapport aux s_{ij}, une forme de degré m.

Les invariants b_α de $\mathfrak{F}$ se construisent avec les b,

comme les invariants a_α de F se construisent avec les a, c'est-à-dire linéairement. D'autre part (17°), les a s'expriment linéairement avec les a_α et $\varphi(m-2)$ autres paramètres a'_μ, $(\mu = 1, 2, \ldots, \varphi(m-2))$. Comme $b = P[a]$, on a finalement

$$(6) \qquad b_\alpha = \sum_{\alpha'} h_{\alpha\alpha'} a_{\alpha'} + \sum_{\mu} g_{\alpha\mu} a'_\mu,$$

$$(h_{\alpha\alpha'}, g_{\alpha\mu} = \text{const.}; \qquad \alpha', \alpha = 1, 2, \ldots, \mathfrak{M}(m)).$$

Pour que $\omega(y)$ divise $\bar{F}(y)$, il faut et il suffit que $\omega(z)$ divise $F(z)$. Ainsi dans (6), dès que tous les a sont nuls, les b_α doivent tous s'évanouir, pour tout choix des indéterminées a'_μ. De là déjà $g_{\alpha\mu} = 0$.

Mais les invariants b ne peuvent s'évanouir tous que si les a s'évanouissent tous, donc le déterminant des $h_{\alpha\alpha'}$ est différent de zéro.

En résumé, $b = H[a]$, où $H = [h_{\alpha\alpha'}]$ est une matrice $\mathfrak{M}(m)$-aire avec $|H| \neq 0$.

Ainsi, *le changement de variables* $z = S[y]$ *se traduit sur les invariants par une collinéation* $\mathfrak{M}(m)$-aire H. Cela (20°) peut être considéré comme indifférent.

La propriété des formations $a_\alpha(a)$ est donc projective; de là leur nom d'*invariants*.

22° On a nommé, au 17°, *résiduelle* $\mathfrak{R}_{mn}$ toute combinaison linéaire, homogène, à coefficients constants des résiduelles élémentaires Φ. Il est évident que la résiduelle $\mathfrak{R}_{mn} \equiv \Sigma K \Phi$ ne peut devenir $\equiv 0 \pmod{\omega}$ qu'en s'évanouissant identiquement avec toutes les constantes K.

23° On a (16°)

$$F = \bar{F} - \omega Q = \mathfrak{R}_{mn} + \omega Q \binom{m-2}{z};$$

à son tour

$$Q\left(\frac{m-2}{z}\right) = \mathcal{R}_{m-2,n} + \omega\, Q_1\left(\frac{m-4}{z}\right),$$

et ainsi de suite. Bref

$$F = \sum_{s=0}^{s=\sigma} \omega^s \mathcal{R}_{m-2s,n},$$

σ étant $\frac{1}{2}m$ ou $\frac{1}{2}(m-1)$ suivant que m est pair ou impair.

Écrire F sous cette expression c'est *ordonner* F *par rapport aux puissances croissantes de* ω.

L'opération est univoque.

Admettons, en effet, qu'on ait à la fois

$$F = A_0 + A_1\omega + A_2\omega^2 + \ldots = B_0 + B_1\omega + \ldots.$$

Il vient

$$A_0 - B_0 \equiv 0 \qquad (\text{mod}\,\omega);$$

mais $A_0 - B_0$ est une résiduelle $\mathcal{R}_{mn}$, donc (22°) $A_0 = B_0$. Après départ de ω, on aurait de même

$$A_1 - B_1 = \mathcal{R}_{m-2,n} \equiv 0 \quad (\text{mod}\,\omega) \quad \text{et} \quad A_1 = B_1, \ldots.$$

C. Q. F. D.

CHAPITRE III.

Domaine holoïde Ω, *complet et bien défini.*

24° Posons, comme au 2°,

$$\omega = z_1 z_2 - \zeta, \qquad -\zeta = z_3 z_4 + \ldots,$$

de façon que

$$z_1 z_2 \equiv \zeta \qquad (\text{mod}\,\omega).$$

Les formes $F^{(1)}$, où z_1 manque, ou $F^{(12)}$, où z_1 et z_2 manquent simultanément, constituent (Chap. I) des domaines E_{n-1} ou E_{n-2} complets et bien définis, qui suivent les règles de l'algèbre ordinaire.

Vis-à-vis des $n-2$ variables $z_3, z_4, \ldots, z_n$, la formation $\zeta(z)$ *joue le même rôle* que la formation ω par rapport aux n variables $z_1, \ldots, z_n$.

On peut donc, toujours et d'une seule façon (23°), ordonner $F^{(12)}$ par rapport aux puissances de ζ et écrire

$$F^{(12)} = A_0 - \zeta A_1 - \zeta^2 A_2 - \ldots,$$

les A étant des *résiduelles* aux $n-2$ variables $z_2, \ldots, z_n$.

Entre expressions $F^{(1)}$ ou $F^{(12)}$ toute congruence (mod ω) est une égalité ordinaire.

25° Pour diminuer les accumulations d'indices, je poserai

$$z_1 = x, \qquad z_2 = t,$$

et j'étudierai la divisibilité (mod ω) d'une forme F par le facteur t, lequel est (10°) irréductible (mod ω). Je montrerai que t est aussi (10°) premier (mod ω).

26° Mettons, dans F, t en facteur dans les termes qui le contiennent; on aura

$$F = t(\ldots\ldots) + F_1.$$

F_1 ne contient pas t; c'est donc un polynome en x, à coefficients du type F^{12}. Chacun de ces coefficients peut être ordonné par rapport aux puissances de ζ (24°) et l'on écrira

$$(1) \qquad \begin{cases} F = t(\ldots) + \zeta(\ldots) + F', \\ F' = x^\rho A_\rho + x^{\rho-1} A_{\rho-1} + \ldots, \end{cases}$$

où les A sont des *résiduelles*, par rapport à ζ, à $n-2$ variables $z_3, \ldots, z_n$.

L'expression F′ est permanente (5°), car elle ne change pas si l'on ajoute à F l'expression

$$\omega P = (xt - \zeta) P.$$

27° Lemme. — *Pour que* F *soit divisible* (mod ω) *par* t, *il faut et il suffit que* F′ *s'évanouisse identiquement.*

La condition est suffisante, en se reportant à la formule (1) du 26°, puisque $\zeta \equiv xt \pmod{\omega}$.

Montrons que la condition $F' = 0$ est nécessaire. Si t divise (mod ω) F, on a

$$F = t(\ldots) + \omega(\ldots) = t(\ldots) + \zeta(\ldots).$$

$F = 0$ pour $t = \zeta = 0$, quel que soit x.

La formule (1) du 26° montre que F′ doit s'évanouir, pour toute valeur de x, dès que $\zeta = 0$.

ζ étant irréductible (2°), divise donc A_ρ, $A_{\rho-1}$, ...; ces expressions sont des résiduelles vis-à-vis de ζ. Alors

$$A_\rho = A_{\rho-1} = \ldots = 0, \quad F' = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

28° Théorème. — *Si* t *ne divise* (mod ω) *ni* A, *ni* B, t *ne saurait diviser* (mod ω) *le produit* AB, autrement dit : *le facteur* t *est premier* (mod ω).

Appliquons à A et B la formule (1) du 26° et écrivons :

$$\begin{aligned}
A &= t(\ldots) + \zeta(\ldots) + A', \\
B &= t(\ldots) + \zeta(\ldots) + B', \\
A' &= x^\rho A_\rho + x^{\rho-1} A_{\rho-1} + \ldots, \\
B' &= x^\sigma B_\sigma + x^{\sigma-1} B_{\sigma-1} + \ldots,
\end{aligned}$$

où les $A_\rho, \ldots, B_\sigma, \ldots$ sont des résiduelles par rapport aux $n-2$ variables $z_3, \ldots, z_n$.

Comme t ne divise (mod ω) ni A ni B, on a (27'') $A' \neq 0$, $B' \neq 0$ et, en particulier, $A_\rho \neq 0$, $B_\sigma \neq 0$.

Or

$$AB = t(\ldots) + \zeta(\ldots) + A'B',$$
$$A'B' = x^{\rho+\sigma} A_\rho B_\sigma + x^{\rho+\sigma-1}(\ldots) + \ldots.$$

Si t divise (mod ω) le produit AB, on a (27'') $AB = 0$ pour $t = \zeta = 0$ *quel que soit* x.

$A'B' = 0$ pour $\zeta = 0$ quel que soit x: notamment $A_\rho B_\sigma = 0$ pour $\zeta = 0$. Nous sommes en algèbre ordinaire: ζ, qui est un facteur irréductible et premier, doit diviser le produit $A_\rho B_\sigma$ sans diviser par hypothèse ni A_ρ, ni B_σ. Si, en effet, ζ divisait les résiduelles A_ρ ou B_σ, on aurait $A_\rho = 0$ ou $B_\sigma = 0$, ce qui est contre l'hypothèse.

Bref, t ne peut diviser (mod ω) le produit AB.

C. Q. F. D.

t étant (mod ω) à la fois irréductible et premier, le diviseur t se comporte, dans le domaine Ω, suivant les règles de l'arithmétique ordinaire.

29° Désignons :

Par des majuscules latines A, B, C, ... des formes de Ω, *non divisibles* (mod ω) *par* t;

Par des minuscules grecques $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ des entiers non négatifs;

Par des minuscules latines $a, b, c, \ldots$ des formes du type $F^{(1)}$ (c'est-à-dire où $x = z_1$ ne figure pas), *non divisibles par* t.

Je dis que dans une relation

$$(o) \quad t^\alpha A \binom{m}{z} \equiv a \binom{m+\alpha}{z}, \quad \text{ou} \quad A \equiv \frac{a}{t^\alpha} \quad (\text{mod}\,\omega)$$

supposée existante, *chacune des expressions* A *ou* a, *supposée donnée, définit sans ambiguïté l'autre expression, ainsi que l'exposant* α.

I. Donnons-nous A et supposons un instant qu'on ait à la fois, $\alpha' \geqq \alpha$,

$$t^{\alpha} A \equiv a \quad \text{et} \quad t^{\alpha'} A \equiv a' \quad (\text{mod}\,\omega);$$

il viendrait, puisque a et a' sont du type F[1],

$$t^{\alpha'} a \equiv t^{\alpha} a' \quad (\text{mod}\,\omega), \qquad a' = t^{\alpha' - \alpha} a.$$

Or t ne divise pas a'; alors $\alpha' = \alpha$, $a' = a$.

C. Q. F. D.

II. Donnons-nous a et admettons qu'on ait à la fois

$$a \equiv t^{\alpha} A \equiv t^{\alpha'} A' \quad (\text{mod}\,\omega); \qquad \alpha' \geqq \alpha.$$

Il viendrait

$$A \equiv t^{\alpha' - \alpha} A' \quad (\text{mod}\,\omega);$$

cela est absurde pour $\alpha' - \alpha \neq 0$, puisque t ne divise pas (mod ω) la forme A.

Donc $\alpha' = \alpha$ et

$$A' \equiv A \quad (\text{mod}\,\omega).$$

A est définie, dans le domaine Ω, à l'équivalence près, c'est-à-dire sans ambiguïté.

La relation

$$a \equiv t^{\alpha} A \quad (\text{mod}\,\omega)$$

établit donc entre les expressions A, d'une part, et a, d'autre part, *une correspondance biunivoque*.

30° Construisons A, connaissant a. Grâce aux explications des 26° et 27°, on connaîtra l'exposant,

entier et non négatif α, tel que a admette pour diviseur $(\bmod \omega)$ t^α, mais non plus $t^{\alpha+1}$. Alors A est le quotient $(\bmod \omega)$ de a par t^α.

Construisons a, connaissant A. Ordonnons A par rapport aux puissances décroissantes de $z_1 = x$,

$$A = x^p K + x^{p-1} K_1 + \ldots \qquad (\text{les K du type } F^{(1)}).$$

On peut admettre que $t = z_2$ ne divise pas K. En effet, si $K = tL$, on a, puisque $\omega = tx - \zeta$,

$$\begin{aligned} A &= x^{p-1} L tx + x^{p-1} K_1 + \ldots \\ &= x^{p-1} L(\omega - \zeta) + x^{p-1} K_1 - \ldots \\ &\equiv x^{p-1}(L\zeta - K_1) + \ldots \qquad (\bmod \omega). \end{aligned}$$

Eu égard à l'équivalence, l'exposant maximum de x serait $p - 1$ et non pas p, et ainsi de suite.

Bref, on admettra que t ne divise pas K et l'on écrira

$$\begin{aligned} A &= x^\alpha K + x^{\alpha-1} K_1 + \ldots, \\ t^\alpha A &= (tx)^\alpha K + t(tx)^{\alpha-1} K_1 + \ldots \\ &\equiv \zeta^\alpha K - \zeta^{\alpha-1} t K_1 + \ldots \equiv a \qquad (\bmod \omega). \end{aligned}$$

a est bien du type $F^{(1)}$: a n'est pas divisible par t, puisque K ne l'est pas.

Les procédés ci-dessus fournissent un certain a partant d'un A donné, ou un certain A partant d'un a donné. Mais on sait (29°) que A et a se définissent mutuellement sans ambiguïté ; donc *la correspondance biunivoque est effectivement réalisée*, entre les expressions (29°) A, B, C, ... et a, b, c, ... qui seront dites *correspondantes* A avec a, B avec b, ... par la relation

$$t^\alpha A \equiv a, \qquad \text{ou} \qquad A = \frac{a}{t^\alpha} \qquad (\bmod \omega).$$

31° Théorème. — *Pour que* A *divise* (mod ω) *la forme* C, *il faut et il suffit que a divise c.*

I. *La condition est nécessaire.* — En effet, s'il existe une forme B telle que $C \equiv AB \pmod{\omega}$, on aurait

$$(\text{mod}\,\omega)\left\{\begin{array}{l} a \equiv t^{\alpha} A, \qquad b \equiv t^{\beta} B, \qquad c \equiv t^{\gamma} C: \\ t^{\alpha+\beta+\gamma} C \equiv t^{\alpha+\beta} c \equiv t^{\alpha+\beta+\gamma} AB \equiv t^{\gamma} ab: \end{array}\right.$$

$$t^{\alpha+\beta} c \equiv t^{\gamma} ab \qquad (\text{mod}\,\omega),$$

et, comme nous sommes dans le type $F^{(1)}$,

$$t^{\alpha+\beta} c = t^{\gamma} ab;$$

t ne divise ni a, ni b, ni c; donc $\gamma = \alpha + \beta$ et a divise c, puisque $c = ab$.

II. *La condition est suffisante.* — Nommons b le quotient $c : a$ et B la forme telle que $t^{\beta} B \equiv b \pmod{\omega}$. Il viendra

$$c = ab \equiv t^{\gamma} C \equiv t^{\alpha+\beta} AB \left.\begin{array}{l} \\ t^{\gamma} C \equiv t^{\alpha+\beta} AB \end{array}\right\} (\text{mod}\,\omega).$$

Si $\gamma < \alpha + \beta$, t divise (mod ω) la forme C, ce qui est absurde.

Si $\gamma > \alpha + \beta$, t divise (mod ω) le produit AB. Or t est un facteur premier (mod ω); t doit diviser (mod ω) soit A, soit B, ce qui n'est pas. Alors $\gamma = \alpha + \beta$,

$$C \equiv AB \qquad (\text{mod}\,\omega). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

32° Soient :

deux formes de Ω, A et B, non divisibles (mod ω) par t, telles que

$$a \equiv t^{\alpha} A, \qquad b \equiv t^{\beta} B \qquad (\text{mod}\,\omega):$$

d, le p. g. c. d. des deux formes a et b du type $F^{(t)}$: ce d existera toujours, car le domaine des formes $F^{(t)}$ est complet : t, ne divisant ni a, ni b, ne divise pas d;

D, la forme de Ω telle que

$$t^{\delta} D \equiv d \qquad (\text{mod}\,\omega).$$

Je dis que D *est le p. g. c. d.* (mod ω) *de* A *et* B.

En effet, puisque d divise a et b, D divise (mod ω) tant A que B (31°).

Soit d'autre part D', avec

$$t^{\delta'} D' \equiv d' \qquad (\text{mod}\,\omega),$$

un diviseur (mod ω) quelconque, commun à A et B. En vertu de 31°, d' divise a et b et aussi d, qui est leur p. g. c. d. Donc, toujours d'après 31°, D' divise (mod ω) la forme D.

D est donc bien le p. g. c. d. (mod ω) cherché des deux formes A et B.

La construction de D s'effectue par des opérations déjà décrites, connues et en nombre fini.

On retiendra donc ceci :

Deux formes A et B prises à volonté dans Ω, mais dont aucune n'est divisible (mod ω) par le facteur t, admettent toujours (mod ω) un p. g. c. d. D, lequel non plus n'est pas divisible (mod ω) par le facteur t.

33° Pour avoir deux formes *tout à fait quelconques* dans Ω, prenons

$$\left.\begin{array}{l} L \equiv t^{\lambda} A \\ M \equiv t^{\mu} B \end{array}\right\} (\text{mod}\,\omega), \qquad \text{avec} \qquad \lambda \geq \mu.$$

Nommons D le p. g. c. d. (mod ω) de A et B obtenu

par la méthode du 32°, et posons

$$A \equiv PD, \qquad B \equiv QD \qquad (\bmod \omega).$$

Écrivons enfin

$$\Delta \equiv t^{\lambda} D \qquad (\bmod \omega).$$

Je dis que L *et* M *admettent* Δ *pour p. g. c. d.* $(\bmod \omega)$.

Cela suffit pour établir que le domaine Ω est complet et bien défini.

I. Δ *est* $(\bmod \omega)$ *un diviseur commun à* L *et* M.

Cela devient évident si l'on écrit

$$\left.\begin{aligned} L &\equiv t^{\lambda} A \equiv t^{\lambda} PD \equiv \Delta P \\ M &\equiv t^{\mu} B \equiv t^{\mu} QD \equiv \Delta t^{\mu-\lambda} Q \end{aligned}\right\} (\bmod \omega).$$

II. *Toute forme* $\Delta' \equiv t^{\rho} R$, $\rho \geqq 0$, *qui est* $(\bmod \omega)$ *un diviseur commun à* L *et* M, *divise* $(\bmod \omega)$ *aussi la forme* Δ.

Écrivons

$$\left.\begin{aligned} L &\equiv t^{\lambda} A \equiv \Delta' t^{\sigma} S \\ M &\equiv t^{\mu} B \equiv \Delta' t^{\tau} T \end{aligned}\right\} (\bmod \omega),$$

où $t^{\sigma} S$ et $t^{\tau} T$ sont les quotients $(\bmod \omega)$ $L : \Delta'$ et $M : \Delta'$; ou bien

$$\left.\begin{aligned} t^{\lambda} A &\equiv t^{\rho+\sigma} SR \\ t^{\mu} B &\equiv t^{\rho+\tau} TR \end{aligned}\right\} (\bmod \omega).$$

Le facteur t, qui est $(\bmod \omega)$ à la fois irréductible et premier, ne divise $(\bmod \omega)$ ni A, ni B, ni R, ni S, ni T.

Donc

$$\rho = \lambda - \sigma = \mu - \tau, \qquad A \equiv RS \quad \text{et} \quad B \equiv RT \qquad (\bmod \omega).$$

Par suite, $\rho \leqq \lambda$, R est $(\bmod \omega)$ un diviseur de D (en

vertu du 32°), et

$$\Delta' = t^{\rho} R$$

est (mod ω) un diviseur de $\Delta \equiv t^{\lambda} D$ (mod ω).

C. Q. F. D.

34° J'ai ainsi achevé la démonstration du théorème annoncé dans l'Introduction.

On a exclu toutefois les cas (2°) où ζ n'est pas irréductible, c'est-à-dire

$$n = 4, \qquad -\zeta = z_3 z_4,$$
$$n = 3, \qquad -\zeta = z_3^2.$$

Ces cas appellent une discussion spéciale, que je publierai ultérieurement.

[B2a]

SUR LES RAPPORTS ANHARMONIQUES GÉNÉRALISÉS;

PAR M. GEORGES REMOUNDOS.

1. Dans deux articles insérés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (¹), je me suis occupé d'une généralisation tout à fait naturelle de la notion de rapport anharmonique de quatre quantités; c'était, en effet, un défaut de ne parler que du rapport anharmonique de quatre quantités, en écartant ainsi le cas d'un nombre supérieur de quantités, d'autant plus que les propriétés caractéristiques de ces rapports ne supposent qu'un nombre pair de quantités. Ma généralisation concerne donc le nombre des quantités

(¹) Mai 1904 et août 1905.

données et consiste en ceci : Nous appelons *rapport anharmonique de plusieurs quantités* $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{2n}$, *ou rapport hyperanharmonique* une expression de la forme :

$$R = \frac{(y_{k_1} - y_{l_1})(y_{k_2} - y_{l_2}) \ldots (y_{k_n} - y_{l_n})}{(y_{\alpha_1} - y_{\beta_1})(y_{\alpha_2} - y_{\beta_2}) \ldots (y_{\alpha_n} - y_{\beta_n})},$$

les k_i et l_i étant tous différents d'entre eux, ainsi que les α_i et β_i (¹).

L'utilité de ces rapports est due à trois propriétés caractéristiques, qui sont pour ainsi dire fonctionnelles et qui s'énoncent comme il suit :

1° Pour qu'ils s'annulent, il faut que deux quantités deviennent égales;

2° Pour qu'ils deviennent infinis, il faut aussi que deux quantités deviennent égales;

3° La substitution homographique

$$y_i = \frac{\alpha\omega_i + \beta}{\gamma\omega_i + \delta}$$

ne les change pas. Au point de vue de la théorie des formes, leur construction présente le caractère suivant : ils sont des *rapports de deux formes plusieurs fois linéaires* (c'est-à-dire à plusieurs séries de variables) d'une certaine classe élémentaire caractérisée par la possibilité d'une décomposition en d'autres formes unilinéaires.

Parmi les trois propriétés citées plus haut, il est remarquable que l'importance caractéristique des deux premières, qui m'a conduit à l'extension des rapports anharmoniques aux cas d'un nombre de quantités

---

(¹) J'ai dans mon premier article, calculé le nombre des rapports hyperanharmoniques que l'on peut former avec $2n$ quantités données.

supérieur à quatre, m'a été suggérée par la théorie des fonctions : on s'en rend surtout compte dans quelques applications à la théorie des équations différentielles du premier ordre, avec laquelle paraissent se rattacher d'une façon profonde la théorie des rapports anharmoniques et ses généralisations (*voir* mon premier article des *Nouvelles Annales*, mai 1904 : *Sur une extension de la notion des rapports anharmoniques et les équations différentielles du premier ordre*) et mon Mémoire *Sur les fonctions ayant un nombre fini de branches* (*Journ. de Math.* de M. Jordan, 1906, fasc. I).

2. Dans mon second article des *Nouvelles Annales* (août 1905), j'ai fait l'assertion que les rapports hyperanharmoniques ne sont pas tous des produits de rapports anharmoniques : pour préciser, j'ajoute ici que cette assertion est exacte si l'on exige l'emploi de rapports anharmoniques n'ayant aucun élément commun : dans le cas contraire, il est toujours possible d'exprimer les rapports hyperanharmoniques comme produits de rapports anharmoniques : c'est ce que je me propose de démontrer dans la suite.

Considérons, par exemple, le rapport hyperanharmonique des six quantités :

$$R = \frac{(12)(34)(56)}{(13)(45)(26)},$$

en posant pour abréger

$$x_i - x_k = (ik).$$

On a

$$R = \frac{(12)(34)}{(13)(24)}\,\frac{(24)(56)}{(45)(26)} = (123)(245)(56).$$

La notation (1 2 3 4) désigne un rapport anharmonique des quantités y_1, y_2, y_3, y_4.

Je démontrerai maintenant que cela est une propriété générale de tout rapport hyperanharmonique; à cet effet, je prouverai que tout rapport hyperanharmonique de $2n$ quantités peut se mettre sous la forme d'un produit d'un rapport anharmonique et d'un rapport hyperanharmonique (ou anharmonique) de $2n-2$ quantités et, en général, d'un nombre inférieur de quantités.

Considérons le rapport suivant de $2n$ quantités :

$$R_{2n} = \frac{(y_{k_1}-y_{\lambda_1})(y_{k_2}-y_{\lambda_2})\ldots(y_{k_n}-y_{\lambda_n})}{(y_{\alpha_1}-y_{\beta_1})(y_{\alpha_2}-y_{\beta_2})\ldots(y_{\alpha_n}-y_{\beta_n})} = \frac{y_{k_1}-y_{\lambda_1}}{y_{\alpha_1}-y_{\beta_1}} Q_{2n-2},$$

k_1 étant, par suite d'un choix convenable, égal à α_1, ce qui est toujours possible, puisque l'indice k_1 doit figurer aussi dans le dénominateur; le deuxième facteur est un rapport qui n'est pas hyperanharmonique ou anharmonique, puisque la quantité y_{λ_1} ne figure pas dans le numérateur de Q_{2n-2} et y_{β_1} ne figure pas dans le dénominateur de Q_{2n-2}. On a évidemment $\lambda_1 \neq \beta_1$, puisque, autrement, le rapport donné ne dépendrait que de $2n-2$ quantités: soit [1] $y_\rho - y_{\lambda_1}$ le facteur de Q_{2n-2} qui contient y_{λ_1} et $y_\sigma - y_{\beta_1}$ le facteur de Q_{2n-2} (dans le numérateur), qui contient y_{β_1} et mettons

$$Q_{2n-2} = \frac{y_\sigma - y_{\beta_1}}{y_\rho - y_{\lambda_1}} Q_{2n-4}.$$

On aura

$$(1) \qquad R_{2n} = \frac{(y_{k_1}-y_{\lambda_1})(y_\sigma - y_{\beta_1})}{(y_{\alpha_1}-y_{\beta_1})(y_\rho - y_{\lambda_1})} Q_{2n-4}.$$

---

[1] Il est clair que ce facteur ne peut pas coïncider avec le premier $y_{\alpha_1} - y_{\beta_1}$, puisque, autrement, l'on aurait : $\lambda_1 = \beta_1$ et $\rho = \alpha_1$; ce facteur serait commun au numérateur et au dénominateur, et notre rapport ne dépendrait que de $2n-2$ quantités.

Pour aller plus loin, il faut faire attention sur les inégalités suivantes :

$$\rho \neq \lambda_1, \quad \rho \neq k_1, \quad \rho \neq \alpha_1, \quad \rho \neq \beta_1,$$
$$\sigma \neq \beta_1, \quad \sigma \neq \alpha_1, \quad \sigma \neq \lambda_1,$$

qui sont évidentes; il en résulte que ρ doit exister dans le numérateur de Q_{2n-4} et σ dans le dénominateur de Q_{2n-4}; d'autre part, les éléments y_{k_1}, y_{λ_1} et y_{β_1} ne figureront pas dans Q_{2n-4}, parce qu'ils figurent dans les deux termes de la fraction

$$(2) \qquad \frac{(y_{k_1}-y_{\lambda_1})(y_\sigma-y_{\beta_1})}{(y_{\alpha_1}-y_{\beta_1})(y_\rho-y_{\lambda_1})} \qquad (k_1=\alpha_1);$$

en outre, les éléments qui ne figurent pas dans cette fraction figurent dans la fraction Q_{2n-4} d'une façon anharmonique (j'entends par là qu'ils figurent en numérateur et en dénominateur linéairement).

Cela bien compris, écrivons la formule (1) sous la forme suivante :

$$(3) \qquad R_{2n} = \frac{(y_{k_1}-y_{\lambda_1})(y_\sigma-y_{\beta_1})}{(y_{\alpha_1}-y_{\beta_1})(y_\sigma-y_{\lambda_1})}\,\frac{(y_\sigma-y_{\lambda_1})}{(y_\rho-y_{\lambda_1})}\,Q_{2n-4},$$
$$(k_1=\alpha_1).$$

Dans le cas où $\rho = \sigma$, cette transformation est inutile, puisque la fraction (2) serait bien un rapport anharmonique des quantités y_{k_1}, y_{λ_1}, y_{β_1} et y_σ et Q_{2n-4} serait un rapport hyperanharmonique ou anharmonique de $2n-4$ quantités (les quantités y_{k_1}, y_{λ_1}, y_σ et y_{β_1} y manqueront totalement). Dans ce cas, donc, *le rapport hyperanharmonique donné est décomposé en un rapport anharmonique et un autre hyperanharmonique ou anharmonique de $2n-4$ quantités; ces deux rapports n'ont aucun élément commun.*

Posons-nous maintenant dans le cas $\rho \neq \sigma$ et remarquons que la première fraction du second membre de la formule (3) est bien un rapport anharmonique des quantités y_{k_1}, y_{λ_1}, y_{β_1} et y_σ et le second facteur $\frac{y_\sigma - y_{\lambda_1}}{y_\rho - y_{\lambda_1}} Q_{2n-4}$ est un rapport hyperanharmonique ou anharmonique de $2n - 2$ quantités (ce sont les quantités y_{k_1} et y_{β_1} qui y manquent); ces deux rapports auxquels se décompose R_{2n} ont deux éléments communs y_{λ_1} et y_σ. On a donc

$$R_{2n} = R_4 R_{2n-2},$$

R_4 désignant un rapport anharmonique. On en déduit immédiatement le théorème suivant : *Tout rapport hyperanharmonique est égal à un produit de rapports anharmoniques.*

3. La réciproque n'est pas vraie : un produit de rapports anharmoniques n'est pas toujours un rapport hyperanharmonique, parce qu'il est possible que ce produit soit égal à une fraction à termes non linéaires par rapport à chacune des quantités y_i. De même, une fonction de plusieurs rapports anharmoniques ayant ou non des éléments communs n'est pas toujours un rapport anharmonique ou hyperanharmonique, puisque la seule propriété qui subsiste toujours est la troisième, d'après laquelle ils sont invariants par la substitution homographique.

On peut aussi démontrer que les seules fonctions de rapports anharmoniques, linéaires [1] par rapport à toutes les quantités (à chacune séparément), qui

---

[1] Ou plutôt quotients de deux fonctions entières linéaires; on pourrait dire aussi : *homographiques par rapport à chacune des quantités.*

jouissent des deux premières propriétés citées plus haut (n° 1), sont les rapports hyperanharmoniques. Considérons, en effet, une fonction $f(y_1 y_2 y_3 \ldots y_{2n})$, quotient de fonctions linéaires par rapport à chacune des quantités y_i et ne dépendant que de rapports anharmoniques, et supposons qu'elle jouisse de la propriété suivante : *Pour qu'elle s'annule ou devienne infinie, il faut que deux quantités y_i soient égales.*

La fonction $f(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{2n})$ sera d'abord homogène par rapport aux quantités $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ et de degré zéro, parce qu'il en est ainsi de chacun des rapports anharmoniques, soit :

$$f(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{2n}) = \frac{f_1(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{2n})}{f_2(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{2n})};$$

il est clair que les quantités y_i doivent figurer dans les deux termes (tous les deux); autrement, la propriété ci-dessus posée ne serait pas vérifiée ; si, par exemple, y_1 n'existait que dans le numérateur, la fonction donnée f deviendrait infinie pour $y_1 = \infty$, quelles que soient les autres quantités.

Envisageons à part le numérateur $f_1(y_1 y_2 y_3 \ldots y_{2n})$ qui est de la forme :

$$f_1 = A_1(y_2 y_3 \ldots y_{2n})(y_1 - y_{\gamma_1}),$$

y_{γ_1} étant une des autres quantités y_i $(i = 2, 3, \ldots, 2n)$ et la fonction A_1 ne contenant ni y_1 ni y_{γ_1}; de même, l'on aura

$$A_1 = (y_2 - y_{\gamma_2}) A_2,$$

y_{γ_2} étant différent de y_1, y_2 et y_{γ_1} et A_2 ne contenant ni y_2 ni y_{γ_2}; nous continuons de la même façon et nous arrivons à la conclusion que le numérateur f_1 sera de la forme

$$f_1 = c_1(y_1 - y_{\gamma_1})(y_2 - y_{\gamma_2}) \ldots (y_n - y_{\gamma_n}).$$

On aura de même

$$f_2 = c_2(y_1 - y_{\delta_1})(y_2 - y_{\delta_2})\ldots(y_n - y_{\delta_n}),$$

c_1 et c_2 étant deux constantes. Tout cela n'est qu'une conséquence immédiate de la condition ci-dessus supposée. On aura donc

$$f(y_1 y_2 \ldots y_{2n}) = \frac{c_1}{c_2}\frac{(y_1 - y_{\gamma_1})(y_2 - y_{\gamma_2})\ldots(y_n - y_{\gamma_n})}{(y_1 - y_{\delta_1})(y_2 - y_{\delta_2})\ldots(y_n - y_{\delta_n})},$$

ce qui prouve que la fonction donnée est, à un facteur constant près, un rapport hyperanharmonique de $2n$ quantités.

Nous pouvons même ajouter que l'hypothèse d'après laquelle f dépend de rapports anharmoniques n'est pas nécessaire, comme le montre la démonstration que nous venons d'exposer; cette hypothèse est une conséquence des autres. Nous avons donc la conclusion que les deux propriétés 1° et 2° du n° 1 de ce travail sont caractéristiques pour nos rapports hyperanharmoniques ou anharmoniques.

VARIÉTÉS.

UN JOURNAL MATHÉMATIQUE EN ESPERANTO.

Nous sommes heureux de pouvoir annoncer l'apparition prochaine d'un journal mathématique, *Gazeto Matematika Internacia*, qui sera rédigé entièrement en langue internationale esperanto. Les *Nouvelles Annales*, qui sont revenues à diverses reprises sur l'intérêt considérable que présente l'esperanto pour

les mathématiciens, salueront avec joie ce nouveau confrère.

Le programme de *Gazeto Matematika Internacia* est rédigé en cinq langues (esperanto, hollandais, français, anglais, allemand). Nous mettons sous les yeux de nos lecteurs le texte français.

JOURNAL MATHÉMATIQUE INTERNATIONAL.

Nous avons formé le projet de publier un périodique pour les Sciences mathématiques, en esperanto, donc accessible pour tous les mathématiciens du monde.

On comprendra aisément la grande utilité d'un tel périodique. Le nombre des lecteurs pourra être beaucoup plus grand que celui d'un périodique écrit dans une autre langue; donc nombre d'études et de communications intéressantes pourront être lues par tous les mathématiciens de tous les pays.

Le nouveau périodique comprendra tout ce qui se rapporte aux Sciences mathématiques, aussi bien la théorie que l'application, la Mécanique et la théorie de la Physique, les grandes dissertations aussi bien que les petites communications (scientifiques ou pédagogiques), des problèmes, une correspondance, des comptes rendus de livres parus, une chronique (historique et biographique), et, en outre, les traductions d'articles qui ont déjà paru dans une autre langue. D'autres périodiques pourront, avec l'autorisation de l'auteur, mettre ces traductions dans leur propre langue.

Ainsi on formera un lien solide entre les périodiques qui existent déjà, car, au moyen de cette nouvelle publication, une dissertation pourra en peu de temps être traduite en plusieurs langues.

Ce périodique ne prétend donc nullement remplacer les périodiques qui existent déjà; il tâchera seulement de leur être un appui solide.

Le nombre des feuilles et le prix de cette nouvelle publication (*Gazeto Matematika Internacia*) dépendront naturellement du nombre des souscripteurs et du nombre des articles

que la rédaction recevra. Pour commencer, l'abonnement pour l'année entière (douze feuilles, soit 192 pages) ne surpassera pas 12fr, 50. Quand le nombre des souscripteurs le permettra, on réduira ce prix ou l'on augmentera le nombre des feuilles.

Ceux qui veulent souscrire sont priés d'envoyer leur nom et leur adresse, résidence et pays (bien lisibles) à M. F. J. Vaes, Mathenesserlaan, 290, à Rotterdam (Hollande) (1).

Ceux qui pourront préparer quelques articles pour cette nouvelle publication sont priés de nous les communiquer aussi vite que possible, en en annonçant l'étendue probable...

En outre, chaque lecteur est prié d'en faire part à son entourage, et nous mettrons aussi à sa disposition des bulletins de souscription pour distribuer entre ses amis.

CERTIFICATS D'ASTRONOMIE.

Grenoble.

Épreuve écrite. — *Les éléments d'une planète étant connus, calculer ses coordonnées équatoriales* ☊ *et* ☋ *pour une époque t donnée.*

Épreuve pratique. — *Passage des coordonnées azimutales d'un astre à ses coordonnées écliptiques.*

Données numériques :

Azimut.....	A =	250° 16′ 30″.2
Hauteur.....	h = —	46° 58′ 23″, 8
Heure sidérale.....	H_1 =	$15^h\,48^m\,2^s.228$
Latitude du lieu.....	λ =	45° 11′ 57″
Obliqui é....	ω =	23° 27′ 27″, 78

(Novembre 1906.)

Marseille.

Épreuve écrite. — *Aberration de la lumière. Aberration des fixes. Lieu vrai; lieu apparent.*

---

(1) On est prié d'affranchir les lettres avec un timbre-poste de 25 c., et les cartes postales à 10 c.

1° *Calcul de l'aberration annuelle en ascension droite et en déclinaison;*

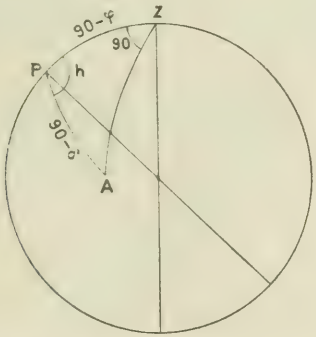
2° *Calcul de l'aberration annuelle en longitude et en latitude;*

3° *Calcul de l'aberration diurne en ascension droite et en déclinaison.*

Aberration planétaire.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Passages d'un astre de déclinaison δ au premier vertical d'un lieu dont la latitude est φ.*

Connaissant l'ascension droite α de l'astre et le temps sidéral local θ_0 au midi moyen, qui précède le passage, on demande de calculer :



1° *L'angle horaire h de l'astre au moment du passage;*

2° *L'heure sidérale locale θ de ce passage;*

3° *L'heure moyenne locale t_m de ce passage.*

Données numériques :

$$\varphi = 43^\circ 18' 17'',5$$
$$\delta = 28^\circ 54' 48'',25$$
$$\alpha = 7^h 19^m 37^s,75$$
$$\theta_0 = 4^h 52^m 15^s,75$$

NOTA. — *On rappelle que le premier vertical est le grand cercle, perpendiculaire au méridien, qui passe par le zénith et que :*

1 heure	sidérale	= 1 heure	moyenne		$-9^{s,m}.8296$
1 minute	»	= 1 minute	»		$-0,1638$
1 seconde	»	= 1 seconde	»		$-0,0027$

SOLUTION DE L'ÉPREUVE PRATIQUE D'ASTRONOMIE.

$$\cos h = \operatorname{tang}\delta . \operatorname{cotang}\varphi$$

(on doit avoir $\varphi > \delta$ en valeur absolue),

$$\theta = h + \alpha,$$
$$t_m = \theta - \theta_0$$

(exprimé en temps moyen).

	Log.
tang δ.....	$\bar{1},7422025$
cotang φ.....	$0,02571285$
cos h.....	$\bar{1},76791535$

h_1 en arc.....	54°7′31″,29		
	h m s		h m s
h_1 en temps...	3.36.30,09	h_2 en temps...	20.23.29,91
α.....	7.19.37,75	α.....	7.19.37,75
θ_1.....	10.56. 7,84	θ_2.....	3.43. 7,66
θ_0.....	4.52.15,75	θ_0.....	4.52.15,75
$\theta_1 - \theta_0$.....	6. 3.52,09	$\theta_2 - \theta_0$.....	22.50.51,91
Temps moy.... } Temps sid..... }	— 59,61	Temps moy.... } Temps sid..... }	— 3.44,58
t_{m-1}.....	6. 2.52,48	t_{m-2}.....	22.47. 7,33

(Novembre 1906.)

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Développement en séries de l'anomalie excentrique, de l'anomalie vraie et du rayon vecteur dans la théorie du Soleil. On fera les calculs jusqu'à et y compris la quatrième puissance de l'excentricité.*

2° *Parallaxe annuelle des étoiles.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On a mesuré à midi vrai à quelques jours de distance du Soleil :*

$$\delta = 16°39'24'',5$$
$$\delta' = 17°44'\ 1'',5$$

La différence des ascensions droites du Soleil a été me-

surée

$$\mathfrak{R}' - \mathfrak{R} = 15^m 32^s.57$$

On demande de calculer $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}$ *et l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur.* (Juillet 1906.)

Épreuve écrite. — *Formules générales de la parallaxe. Développements en séries. Cas d'une étoile. Ellipse de parallaxe.*

Épreuve pratique. — *Un observateur fixe observe une étoile* A *de distance polaire* δ *qui se couche à l'horizon géométrique, et une autre étoile* B *de distance polaire* δ' *encore au-dessus de l'horizon et exactement dans le même azimut que* A.

La différence d'ascension droite entre A *et* B *est* α.

Trouver la distance zénithale de B.

Quelle erreur aura-t-on sur la distance zénithale de B *si* α *est une erreur de* $\pm 1^s$?

Données numériques :

$$\delta = 63^\circ 28' 15''$$
$$\delta' = 47^\circ 16' 7''$$
$$\alpha = 1^h 25^m 12^s.$$

Épreuve écrite. — I. *Discussion de l'équation*

$$u - e \sin u = m.$$

Rayon de convergence du développement suivant les puissances de e.

II. *Déduire des mesures des axes du méridien les dimensions de la Terre.* (Novembre 1906.)

Poitiers.

Épreuve écrite. — *Définition et mesure du temps : jours, années, temps sidéral, temps vrai, temps moyen. Temps sidéral à midi moyen. Équation du temps; ses zéros.*

Épreuve pratique. — *Sachant que le crépuscule finit*

quand le Soleil est à 18° au-dessous de l'horizon, on demande :

1° *Pour quelle distance polaire de cet astre la durée du crépuscule passe-t-elle à Poitiers par un minimum;*

2° *Quelle est la durée de ce crépuscule minimum?*

Latitude de Poitiers 46°34′55″. (Novembre 1906.)

Toulouse.

Épreuve écrite. — I. *Détermination des constantes instrumentales de la lunette méridienne.*

II. *En un lieu de latitude* φ.

1° *Montrer que les corrections dues à la réfraction, de l'angle horaire* H *et de la distance polaire* P *d'une étoile sont données par les formules*

$$\Delta P = \alpha \frac{\sin\varphi \sin P - \cos\varphi \cos P \cos H}{\sin\varphi \cos P + \cos\varphi \sin P \cos H},$$

$$\Delta H = \pm \alpha \frac{\cos\varphi \sin H}{\sin P(\sin\varphi \cos P + \cos\varphi \sin P \cos H)},$$

dans lesquelles $\alpha = 57'',3$ *désigne la constante de la réfraction.*

2° *Déduire de là les expressions de*

$$\frac{d(\Delta P)}{dH} \quad \text{et} \quad \frac{d(\Delta H)}{dH}.$$

3° *Appliquer ces dernières formules au calcul de la différence de marche horaire qu'il faut imposer au mouvement d'horlogerie sidérale d'un équatorial pour l'obliger à suivre exactement,* en angle horaire, *malgré la réfraction, le mouvement diurne d'une étoile située dans l'équateur.*

Note. — *On suppose la réfraction proportionnelle à la tangente trigonométrique de la distance zénithale.*

Épreuve pratique. — *On considère les deux stations définies par les coordonnées suivantes :*

I. *Observatoire de Toulouse,*

Altitude.....	194^m
Latitude.....	43°36′45″
Longitude.....	0°53′44″ Ouest

II. *Sommet du Canigou,*

Altitude.....	2785^m
Latitude.....	42° 1′12″
Longitude.....	0° 7′ 6″ Est.

On demande :

1° *L'angle des deux rayons terrestres aboutissant à ces deux stations;*

2° *Sachant que les distances du centre de la Terre à l'Observatoire de Toulouse et au sommet du Canigou sont respectivement égales à*

$$6367500^m \quad \text{et} \quad 6370685^m,$$

d'examiner si le sommet du Canigou sera visible de l'Observatoire de Toulouse.

NOTE. — *On fait abstraction des montagnes situées entre les deux stations et de la réfraction.*

(Novembre 1906.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2042.

(1906, p. 336.)

Soient, dans un plan vertical, Ox une droite horizontale, Oy une droite verticale dirigée de haut en bas. Construisons : 1° une cardioïde ayant son point de rebroussement en O et son axe dirigé suivant Ok; soit A son second point de rencontre avec Ok; 2° une lemniscate ayant son point double en O, tangente à Ox et Oy et

située dans l'angle xOy et dans l'angle opposé par le sommet.

Un point matériel pesant M *est abandonné sans vitesse initiale en* A *et assujetti à décrire la cardioïde (on fait abstraction des résistances passives de toute nature). Pour chaque position du point* M, *on construit la bissectrice de l'angle* xOM, *qui rencontre la lemniscate en deux points. Démontrer que chacun de ces points décrit la lemniscate d'un mouvement uniforme.* (R. B.)

SOLUTION

Par M. G. F.

Considérons un point matériel M assujetti à se mouvoir sur la courbe dont l'équation est

$$(C) \qquad \rho^n = a^n \cos n\omega;$$

et supposons que ce point est sollicité par une force F, perpendiculaire à l'axe polaire, telle que l'on ait

$$(1) \qquad \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2(1-n)} F y.$$

a. La courbe étant d'abord quelconque, divisons membre à membre la relation des forces vives

$$d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = F\,dy,$$

et la relation (1); nous avons

$$d.\log v^2 = 2(1-n)\,d.\log y,$$

et, par suite,

$$(2) \qquad v = C y^{1-n},$$

$$(3) \qquad F = m \times (1-n)\,C^2 y^{1-2n};$$

il en résulte

$$(4) \qquad t = \frac{1}{C}\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{y^{1-n}}.$$

Par la courbe (C), on a

$$\rho^{n-1}.\,d\rho = -a^n \sin n\omega\, d\omega,$$
$$\rho^{n-1}.\,\rho\, d\omega = \quad a^n \cos n\omega\, d\omega,$$

d'où, par élévation au carré et addition,

$$\rho^{n-1}.\,ds = a^n\, d\omega;$$

on a donc

$$(5) \qquad t = \frac{a^n}{C}\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\left(\frac{y}{\rho}\right)^{1-n}} = \frac{a^n}{C}\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\sin^{1-n}\omega}.$$

Si l'on fait $n = \frac{1}{2}$, et si l'on remplace C^2 par $2g$, la courbe (C) est une cardioïde placée comme l'indique l'énoncé, et l'on est dans le cas d'un point matériel pesant :

$$\frac{1}{2}\, mv^2 = Fy, \qquad v^2 = 2gy, \qquad F = mg;$$

pour $y = 0$, on a bien $v = 0$, comme le demande l'énoncé.

Avec $n \gtrless \frac{1}{2}$, les formules (2) et (3), où l'on fait $y = 0$, montrent que le mobile ne peut pas partir du point A qui correspond à la valeur $\omega = 0$; on prendra comme conditions initiales $y = y_0$, $v = v_0$, aucune de ces deux quantités n'étant nulle, et ces conditions déterminant la constante G.

Voici alors l'interprétation exacte de la relation (1) : *le travail de la force entre les positions* M_0 *et* M *est une fraction parfaitement déterminée,* $\frac{1}{2(1-n)}$, *de la différence* $Fy - F_0y_0$, *la vitesse* v étant de plus infiniment petite, en même temps que l'ordonnée y.

b. Considérons alors la courbe auxiliaire

$$(C') \qquad r^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{1}{n}} \sin\frac{\theta}{n}.$$

On a pour la différentielle de l'arc

$$ds' = \frac{b^{\frac{1}{n}}\, d\theta}{r^{\frac{1}{n}-1}} = \frac{b\, d\theta}{\left(\sin\frac{\theta}{n}\right)^{1-n}},$$

et, par suite,

$$\frac{s'}{b} = n \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\frac{\theta}{n}}{\left(\sin\frac{\theta}{n}\right)^{1-n}}.$$

A chaque valeur de ω relative à la courbe (C) faisons correspondre pour la courbe (C′) une valeur de θ donnée par la formule

$$(6) \qquad \theta = n\omega;$$

nous aurons

$$(7) \qquad \frac{s'}{b} = \frac{nC}{a^n}t,$$

de sorte que le mouvement du point M′ sur la courbe (C′) sera uniforme.

Pour $n = \frac{1}{2}$, la courbe auxiliaire est une lemniscate placée comme l'indique l'énoncé, et l'on a alors $\theta = \frac{\omega}{2}$.

Autres solutions par MM. Laureaux, Letierce et Parrod.

QUESTIONS.

2059. Soient A, B, C trois coniques homofocales. Par un point variable de A on mène une tangente à B et une tangente à C. Démontrer que ces deux tangentes font, avec la tangente à A au point considéré, des angles dont les sinus ont un rapport constant. (Billau.)

2060. Les angles d'un pentagone gauche ont chacun deux bissectrices, l'une intérieure, l'autre extérieure. Cinq bissectrices issues de sommets différents appartiennent à une même congruence linéaire, si les bissectrices extérieures sont en nombre pair. (R. B.)

2061. Au lieu du pentagone de l'énoncé précédent, considérons un hexagone. Six bissectrices issues de sommets différents appartiennent à un même complexe linéaire, si les bissectrices extérieures (ou intérieures) sont en nombre pair.

(Comparer à ces deux questions la question 2051, 1906, p. 480.) (R. B.)

2062. Soit p un nombre entier qui divise l'un des nombres

$$2^{\frac{p-1}{2}}+1, \qquad 2^{\frac{p-1}{2}}-1,$$

et qui, écrit dans le système de numération binaire, a n chiffres. Le nombre $\frac{2^{p-1}-1}{p}$, écrit dans le même système, présente en son centre $n-1$ chiffres 1 encadrés de deux zéros, ou bien $n-1$ zéros encadrés de deux chiffres 1.

(R. Amsler.)

2063. p étant premier, chercher les nombres $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ qui, écrits dans le système de numération binaire, présentent une symétrie parfaite. (R. Amsler.)

2064 [1]. Un point C se meut sur un cercle de rayon égal à l'unité. Un autre point, situé originairement au centre O du cercle, se meut avec la même vitesse que le point C sur une courbe dont la tangente passe constamment par ce point. Démontrer que le rayon de courbure en un point quelconque M de cette courbe est égal au segment intercepté par le rayon OC sur la normale en M. (Dr W. Kapteyn.)

2065. On considère le rayon de courbure ρ de la courbe dont il s'agit dans la question précédente comme fonction de la distance p de l'origine à la tangente à cette courbe. Former l'équation différentielle qui relie ρ à p.

(Dr W. Kapteyn.)

---

[1] Les questions 2064 à 2073 sont extraites des *Wiskundige Opgaven* (*Nieuwe opgaven*, Deel X).

2066. Intégrer l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = py^3 + qy^2 + ry + s,$$

où p, q, r, s sont fonctions de x, sachant que cette équation admet l'intégrale particulière $\beta = -\frac{q}{3p}$.

(Dr W. Kapteyn.)

2067. Construire un quadrilatère inscrit dans un cercle donné, sachant que ce quadrilatère est circonscriptible à un cercle (d'ailleurs inconnu), et connaissant l'aire du quadrilatère ainsi que la longueur d'une de ses diagonales.

(W. Mantel.)

2068. Quand le centre de gravité d'un tétraèdre se confond avec celui des six arêtes ou bien avec le centre de gravité de la surface, les arêtes opposées du tétraèdre sont deux à deux égales. (Dr F. Schuh.)

2069. Déterminer les lignes asymptotiques de la surface, lieu du milieu des cordes de la courbe gauche

$$x = t^n, \qquad y = t^{n-1}, \qquad z = t^{n-2}.$$

(Dr J. de Vries.)

2070. A quelles conditions doit satisfaire un tétraèdre pour que les droites qui joignent chaque sommet au centre du cercle circonscrit à la face opposée f appartiennent à un même hyperboloïde? (Dr P. Zeeman Gz.)

2071. Le tétraèdre dont les sommets ont pour coordonnées tétraédriques (a, b, c, d), (b, c, d, a), (c, d, a, b), (d, a, b, c) est, de quatre manières différentes, en relation hyperboloïdique [1] avec le tétraèdre de référence.

(Dr P. Zeeman Gz.)

---

[1] Deux tétraèdres sont dits en relation hyperboloïdique quand les quatre droites joignant les sommets de l'un aux sommets convenablement associés de l'autre sont quatre génératrices de même système d'un hyperboloïde.

L'ŒUVRE D'AMÉDÉE MANNHEIM ;

I. Avec Amédée Mannheim vient de disparaître un des mathématiciens les plus remarquables que la France ait produits au XIXe siècle. Son talent, profondément original, lui fait une place à part dans la Géométrie pure. Ses méthodes, qui lui appartiennent en propre, ont été entre ses mains un instrument d'une puissance singulière, capable de rivaliser avec l'Analyse de pénétration et de fécondité.

L'œuvre de Mannheim frappe à la fois par l'unité des principes qui ont dirigé ce savant dans toutes ses recherches, et par la diversité des applications qu'il en a faites dans les domaines les plus variés. Aussi la tâche est-elle particulièrement difficile d'exposer cette œuvre dans un ordre satisfaisant. Il ne peut être question de s'attacher à l'ordre chronologique. Comme beaucoup d'inventeurs féconds, Mannheim menait de front plusieurs recherches, laissant momentanément de côté un sujet pour y revenir plus tard, et deux Mémoires qui se complètent mutuellement ont ainsi paru à des époques différentes. D'autre part, une classification établie d'après la nature des sujets traités sera nécessairement artificielle et quelque peu défectueuse : il arrive qu'un travail de Mannheim, spécialement consacré aux propriétés du déplacement d'une figure, renferme de remarquables théorèmes sur les surfaces, et qu'un autre Mémoire, relatif aux pinceaux de droites, vaut surtout par le rôle qu'y jouent les considérations cinéma-

tiques. Néanmoins, il faut se déterminer, et j'examinerai successivement trois groupes de travaux en lesquels peut se répartir l'œuvre principale de Mannheim : les travaux de Géométrie cinématique pure, les travaux relatifs à la théorie des surfaces et à celle des pinceaux, les travaux relatifs à la surface de l'onde. Ces derniers, bien qu'ils aient un objet très particulier, m'ont semblé mériter une mention toute spéciale; c'est à leur occasion que Mannheim a peut-être le mieux donné la mesure de son ingéniosité vraiment surprenante, et manifesté son sentiment si personnel de l'élégance géométrique.

2. Avant d'aborder cette étude, il convient de mentionner des inventions et des travaux étrangers à la Géométrie pure, à laquelle Mannheim a consacré la meilleure partie de son existence : son heureuse modification de la règle à calculs; son « vernier de vernier » qui permet de mesurer une longueur à $\frac{1}{100}$ près, par exemple, en employant deux verniers à 10 divisions au lieu d'un seul vernier à 100 divisions; sa contribution à l'étude des phénomènes d'interférence, pendant l'éclipse totale du 18 juillet 1860; des services importants rendus à la construction du matériel d'artillerie. Tous ces travaux, qui se rapportent au début de sa carrière, témoignent d'un esprit original et inventif, dont l'activité aurait pu s'exercer dans d'autres domaines que dans les Mathématiques pures.

Le premier travail géométrique de Mannheim est daté de 1851 (l'auteur avait alors vingt ans) : il est relatif à la transformation par polaires réciproques, et à l'application de cette transformation aux propriétés métriques. Son Mémoire, paru à une époque où la notion de transformation, si prodigieusement étendue

aujourd'hui, commençait à peine à prendre corps, doit être considéré comme fort remarquable. Il attira l'attention de Steiner qui discerna dans le jeune géomètre un talent plein de promesses.

Puis Mannheim publie successivement d'autres travaux, relatifs soit au même sujet, qu'il enrichit de développements nouveaux, soit à diverses questions de Géométrie infinitésimale. Il serait impossible de signaler tous les résultats élégants qui abondent dans ces Mémoires. Citons, presque au hasard, les constructions des centres de courbure de diverses courbes, en particulier de l'ovale de Descartes, et des caustiques par réfraction d'une courbe donnée; l'application de l'inversion à la cyclide de Dupin; l'étude des polygones inscrits ou circonscrits aux coniques et qui varient d'après certaines lois; des théorèmes curieux sur les arcs de courbes planes ou sphériques spéciales, etc.

Plusieurs des résultats obtenus au cours de ces premières recherches se trouvent réunis dans une Note que Poncelet a tenu à ajouter au deuxième cahier de ses *Applications d'Analyse et de Géométrie* (1865).

Peu de temps après, Mannheim va prendre une haute place dans la Science en publiant son premier Mémoire relatif à la théorie du déplacement, qui sera pour lui l'occasion de découvertes d'une importance primordiale.

3. On ne connaissait que des théorèmes isolés sur le mouvement d'une figure de grandeur invariable, quand Mannheim entreprit l'étude systématique de ce vaste sujet. Ses recherches aboutirent bientôt à un Mémoire fondamental, qui fut, en 1868, l'objet d'un rapport élogieux de Chasles, et dont l'Académie des Sciences ordonna l'impression aux Mémoires des Savants étran-

gers. La *Géométrie cinématique,* tel est le nom que Mannheim devait donner à cette partie de la Science, s'y trouvait pour la première fois constituée en corps de doctrine. Comme ce travail est d'une importance historique considérable, il convient de l'analyser avec quelque détail.

Mannheim étudie les propriétés du déplacement infiniment petit d'une figure assujettie à cinq conditions et résout divers problèmes qu'on peut se poser au sujet d'un tel déplacement : construire, pour une position donnée, l'axe instantané de rotation et de glissement, le pas du mouvement hélicoïdal infiniment petit, le plan normal à la trajectoire d'un point, la caractéristique d'un plan, etc. Ses solutions sont complètes et définitives.

Il aborde ensuite l'étude du déplacement à deux ou à trois paramètres. Dans le premier cas, les normales aux surfaces trajectoires forment une congruence linéaire, comme nous dirions aujourd'hui. Dans le second cas, les divers points de la figure ne décrivent pas, en général, à partir d'une position donnée, d'éléments de surfaces trajectoires déterminées. Il n'y a d'exception que pour les points d'un certain hyperboloïde. Ces théorèmes avaient déjà été énoncés par Schönemann en 1855; mais le travail du géomètre allemand, qui avait passé inaperçu, était ignoré de Mannheim, dont la découverte est absolument indépendante.

Ces généralités constituent la première partie du Mémoire. La seconde renferme des applications d'une haute importance à la théorie des courbes et à celle des surfaces, à l'hélicoïde réglé.

La plupart des résultats contenus dans ce travail sont aujourd'hui classiques et forment, à l'École Poly-

technique par exemple, la base de l'enseignement géométrique.

Dans ses travaux ultérieurs consacrés à la Géométrie cinématique, Mannheim aborde des problèmes difficiles relatifs aux propriétés infinitésimales du second ordre des déplacements. Ces propriétés concernent les plans osculateurs et les rayons de courbure des trajectoires, dans le cas du déplacement à 5 conditions, les rayons de courbure principaux et les plans principaux des surfaces trajectoires, dans le cas du déplacement à 4 conditions. Voici par exemple quelques-uns des résultats obtenus au cours de ces recherches qui exigent une pénétration singulière (je choisis ceux qui se rapportent au déplacement à deux paramètres) :

Le lieu des centres de courbure principaux des surfaces trajectoires des points d'une droite est une courbe gauche du sixième ordre.

Le lieu des points d'une figure qui sont points paraboliques sur leurs surfaces trajectoires est une surface du sixième ordre qui contient l'ombilicale.

Le lieu des points d'une figure dont les surfaces trajectoires ont leurs rayons de courbure égaux est une surface du huitième ordre.

Le lieu des points d'une figure dont les surfaces trajectoires ont leurs rayons de courbure opposés est une surface du cinquième ordre.

C'est encore à l'occasion du déplacement à deux paramètres que Mannheim fait une étude approfondie du conoïde de Plücker ou cylindroïde et découvre de nouvelles propriétés de cette remarquable surface.

D'autres travaux se rapportent à des sujets plus particuliers : il examine, par exemple, le cas spécial où la figure mobile de grandeur invariable est constituée par

un faisceau de plans. Il met en évidence les particularités curieuses que présente le mouvement du double cône employé dans les expériences de physique élémentaire. Souvent, pour mieux illustrer la valeur de sa méthode, Mannheim l'applique de préférence à des problèmes déjà résolus par d'autres voies. Il estimait en effet qu'un résultat inédit importe moins au progrès de la Science que la découverte d'une théorie coordonnant les théorèmes connus, permettant d'en épuiser les conséquences et d'en saisir plus intimement le sens et la raison d'être. C'est ainsi qu'il approfondit, après Halphen, l'étude du mouvement d'une droite dont tous les points décrivent des coniques. Il traite un problème déjà résolu par M. Darboux :

Déterminer le mouvement le plus général d'une figure de grandeur invariable dont tous les points décrivent des courbes planes.

Citons encore son étude synthétique de l'hyperboloïde articulé de M. Greenhill, et sa démonstration du théorème connu :

L'herpolhodie de Poinsot n'a pas de points d'inflexion.

Il faut enfin mentionner une intéressante méthode de transformation des propriétés cinématiques, par la considération originale des *files de sphères*. Pour donner une idée des propositions auxquelles conduit cette méthode de transformation, je rappellerai l'un des théorèmes cités plus haut :

Dans un déplacement à deux paramètres, le lieu des centres de courbure principaux des surfaces trajectoires des points d'une droite est une courbe gauche du sixième ordre.

Il se transforme en celui-ci :

Les surfaces auxquelles les plans d'un faisceau de grandeur constante restent tangents ont leurs centres de courbure principaux sur une courbe gauche du sixième ordre.

4. La méthode cinématique a conduit Mannheim à considérer la théorie des surfaces sous de nouveaux points de vue et à l'enrichir de résultats nombreux et intéressants.

Un premier travail concerne la généralisation du théorème de Meusnier; ce théorème célèbre est relatif à des contacts du second ordre. Le beau théorème découvert par Mannheim s'énonce ainsi :

Lorsque des courbes tracées sur une surface ont entre elles un contact du $n^{ième}$ ordre, leurs $(n-1)^{ièmes}$ polaires ont pour axes de courbure des droites passant par un même point.

Si l'on fait $n = 1$, on retrouve le théorème de Meusnier, en convenant que la polaire d'ordre zéro d'une courbe gauche est cette courbe elle-même.

Mais la contribution la plus importante que Mannheim ait apportée à la théorie des surfaces réside, semble-t-il, dans la découverte du *paraboloïde des huit droites*, dont je rappellerai brièvement la définition.

Remarquons d'abord que tout déplacement (fini ou infinitésimal) d'un dièdre de grandeur constante peut être ramené à une rotation simple (en vertu de la faculté qu'a ce dièdre de recevoir une translation sans cesser de rester en coïncidence avec lui-même). Cela posé, considérons, en chaque point d'une surface, le dièdre formé par les plans principaux. Ce dièdre peut être

amené, à partir de l'une de ses positions, dans une infinité de positions infiniment voisines, et chacun des déplacements correspondants est réductible à une rotation, en vertu de la remarque faite plus haut. *Le lieu des axes autour desquels s'effectuent toutes ces rotations est un paraboloïde,* dont on peut mettre en évidence huit génératrices qui jouent un rôle remarquable par rapport à la surface et par rapport à sa développée : d'où le nom de *paraboloïde des huit droites*.

L'existence de ce paraboloïde correspond à celle d'une relation entre les éléments de la courbure des deux nappes de la développée d'une surface. Les résultats deviennent particulièrement intéressants quand la surface proposée a ses rayons de courbure principaux fonctions l'un de l'autre. Une telle surface est ce que l'on nomme aujourd'hui *surface de Weingarten*. Mannheim retrouve aisément, par l'application de ses méthodes, les théorèmes fondamentaux qui concernent ces surfaces. Il étudie en particulier les cas où la relation qui relie le rayon de courbure a l'une des formes suivantes :

$$R_1 \pm R_2 = \text{const.}, \qquad R_1 R_2 = \text{const.},$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \text{const.}, \qquad \frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R_2} = \text{const.}$$

Il obtient ainsi, à côté de théorèmes démontrés déjà par Ribaucour et par Halphen, des résultats nouveaux et non moins intéressants.

Un sujet plus difficile encore est l'étude des propriétés qui dépendent d'infiniment petits du troisième ordre. Voici comment procède Mannheim, fidèle à son principe de matérialiser, en quelque sorte, les données d'une question par des éléments représentables. Pour définir les éléments d'ordre supérieur d'une

courbe plane, on peut associer à un point de cette courbe les centres de courbure de ses développées successives. D'une manière analogue, Mannheim associe à un point d'une surface les *droites de courbure* des deux nappes de la développée. Cette méthode, qui met bien en lumière sa conception artistique de la Géométrie, est appliquée avec un plein succès. Elle lui permet de démontrer facilement des théorèmes dus à Beltrami, à Ribaucour, à Laguerre, etc., et le conduit à beaucoup de propositions nouvelles. Citons celle-ci, par exemple :

Les centres de courbure des développées de toutes les sections faites dans une surface par des plans passant par une même tangente à cette surface, et qui correspondent au point de contact de cette tangente, sont sur une conique.

Enfin, Mannheim parvient à résoudre de plusieurs façons différentes deux problèmes qui pouvaient sembler inabordables :

Construire le rayon de courbure de la développée d'une section plane d'une surface.

Construire le rayon de courbure de la développée de la courbe de contour apparent d'une surface qu'on projette orthogonalement sur un plan.

Et, notons-le, Mannheim ne se contente pas d'indiquer la possibilité de solutions et de les esquisser. Elles sont poussées jusqu'au bout, avec ce souci de l'élégance et de l'*économie graphique*, si l'on peut dire, que Mannheim apporte dans toutes ses productions. Le fini de ce travail fait penser à une parole de Chasles que Mannheim aimait à citer : « Il y a une différence très grande entre un sujet traité complète-

ment dans les questions nombreuses auxquelles il peut donner lieu et les questions partielles et restreintes où l'on s'arrête à la moindre difficulté. »

La méthode cinématique, si heureusement adaptée à la théorie des surfaces, ne se montre pas moins féconde pour l'étude des courbes gauches. Mannheim l'a appliquée en particulier aux *courbes de Bertrand* (courbes dont les normales principales sont normales d'autres courbes), et là encore, en même temps que des démonstrations nouvelles de théorèmes connus, des propriétés inédites se sont offertes.

Les travaux sur les surfaces se relient étroitement, dans l'œuvre de Mannheim, aux recherches sur les *congruences de droites*, ou plutôt aux *pinceaux*, qui sont les éléments infinitésimaux de ces congruences. Ces études, poursuivies depuis 1872, ont abouti au très beau *Mémoire d'Optique géométrique*, publié en 1884 dans les *Atti della R. Accademia dei Lincei*.

Le point de départ est la représentation d'un élément de surface réglée par un point, représentation qui conduit à celle, d'une simplicité si frappante, d'un pinceau par un cercle. La considération de ce cercle met immédiatement en évidence l'existence des *points focaux* et des *points limites* découverts par Kummer.

Ces principes, appliqués d'abord à l'étude des *normalies* [1], en font connaître des propriétés élégantes et tout à fait nouvelles, telles que celle-ci :

Lorsque la directrice d'une normalie est une ligne

---

[1] Mannheim a donné, comme l'on sait, le nom de *normalies* aux surfaces réglées, engendrées par les normales à une surface associée suivant une loi quelconque. Il semble avoir été le premier à reconnaître l'importance considérable des normalies dans les recherches de Géométrie infinitésimale.

asymptotique d'une surface, le produit des rayons de courbure principaux de cette normalie en chaque point de sa directrice est égal au produit analogue pour la surface, au même point.

Puis l'auteur s'occupe de construire les éléments d'un pinceau réfracté suivant la loi de Descartes. A des formules données par Bertrand, et relatives d'ailleurs au seul cas où le pinceau considéré est un pinceau de normales (plans focaux rectangulaires), Mannheim substitue des constructions géométriques valables dans le cas le plus général, et au moyen desquelles il retrouve, bien entendu, les formules de Bertrand dont l'interprétation était difficile.

Comme je l'ai dit, la théorie des pinceaux intervient souvent, dans l'œuvre de Mannheim, à l'occasion des recherches sur les surfaces, et aussi des études sur le déplacement à deux paramètres.

5. La surface de l'onde de Fresnel a toujours été pour Mannheim un sujet d'études de prédilection. C'est aussi, je le répète, l'un de ceux où se manifeste, de la façon la plus saisissante, l'acuité de sa vision géométrique.

Les principes fondamentaux de la Géométrie cinématique permettent de trouver rapidement : soit le point de contact de la surface avec l'un de ses plans tangents, dans le cas d'une définition tangentielle ; soit le plan tangent en un point dans le cas d'une définition ponctuelle. Mannheim a d'ailleurs introduit toute cette partie élémentaire de la théorie dans son enseignement. Mais la recherche des éléments de la courbure présente plus de difficultés. Mannheim les obtient par les considérations suivantes :

Considérons une normale à un ellipsoïde et faisons-la tourner d'un angle droit autour du centre de l'ellipsoïde, dans le plan déterminé par la normale et par le centre. La droite ainsi obtenue est normale à une certaine surface de l'onde. L'ensemble des deux normales constitue une figure de grandeur invariable, animée d'un mouvement à deux paramètres, dont l'étude conduit, d'une manière naturelle, à la solution du problème posé.

Les énoncés élégants se présentent en foule. Citons celui-ci, par exemple :

Si l'on considère deux points correspondants de l'ellipsoïde et de la surface de l'onde, le cercle qui passe par le centre des deux surfaces et par les centres de courbure principaux de l'ellipsoïde au point considéré, et le cercle analogue relatif à la surface de l'onde sont tangents entre eux.

La construction des centres de courbure de la surface de l'onde mène à la détermination des huit ombilics réels dont on ne s'était pas antérieurement occupé.

Une partie également fort remarquable de l'étude de Mannheim concerne la surface de l'onde considérée comme *surface limite*. On sait qu'à tout complexe de droites est attachée une certaine surface, dite *surface de singularités* ou *surface limite*. Cette surface est, en général, une surface de Kummer pour un complexe du second ordre, et se réduit à une surface de l'onde dans le cas où le complexe considéré est constitué par les arêtes des dièdres droits circonscrits à un ellipsoïde (complexe de Painvin). On voit donc apparaître encore une figure mobile de grandeur constante, et l'on conçoit en quelle abondance la Géométrie ciné-

matique va fournir de nouvelles propriétés de la surface de l'onde.

Il est impossible de séparer ces recherches profondes de celles que Mannheim a poursuivies sur les surfaces homofocales du second ordre et sur les éléments de courbure de ces surfaces. Il montre, par exemple, qu'on peut définir une famille de quadriques homofocales dont chacune coupe partiellement une surface de l'onde donnée suivant une ligne sphérique. Cela l'amène à un élégant théorème dont voici l'énoncé :

Par une tangente à une ligne de courbure d'un ellipsoïde on mène les plans tangents à un ellipsoïde homofocal à celui-ci; le dièdre formé par ces deux plans tangents est de grandeur constante, quelle que soit la tangente considérée.

En poursuivant cette étude, il obtient des relations remarquables et simples entre les centres de courbure principaux des trois quadriques homofocales qui passent par un même point.

6. Telle est, résumée bien incomplètement, l'œuvre principale de Mannheim. J'aurais pu mentionner encore de nombreuses Notes de Géométrie élémentaire, dont aucune n'est indifférente. Si simple que soit le sujet traité, un détail de démonstration ingénieux et inattendu vient toujours frapper le lecteur. C'est comme le divertissement d'un maître. J'aurais pu rappeler aussi l'influence heureuse qu'a eue Mannheim sur l'enseignement de la Géométrie descriptive, en retirant à la ligne de terre son importance imméritée. Mais je n'ai voulu m'attacher qu'aux grandes idées de ce géomètre, à celles qui lui assurent dans la Science une place durable.

Ce sont les découvertes dont j'ai fait la brève analyse qui ont servi de matériaux pour l'imposant Ouvrage que Mannheim a publié en 1894, sous le titre de : *Principes et Développements de Géométrie cinématique*, et qui restera l'un des monuments de la Science française au XIXe siècle. Il serait difficile de citer beaucoup de Traités mathématiques de cette étendue aussi complètement originaux, et dont la lecture soit aussi propre à développer l'esprit d'invention. Dans un tel Livre, où tout est personnel, les idées semblent encore animées de l'activité qui leur a donné le jour. Elles y gardent une chaleur communicative de vie, qu'elles perdent dans un Ouvrage de seconde main où, rangées en bel ordre sans doute, elles dorment glacées comme dans des vitrines.

La Géométrie pure, telle que la concevait Mannheim, est aujourd'hui un peu délaissée, il faut bien le reconnaître. Les recherches de Géométrie infinitésimale se font principalement dans la voie que Gauss a ouverte par son admirable Mémoire fondamental, et qui n'est pas encore complètement explorée. La Géométrie des courbes et des surfaces algébriques est surtout un prétexte à des investigations analytiques, et voit bien souvent son rôle réduit à illustrer les propriétés des fonctions transcendantes. Il serait injuste et puéril, assurément, de s'insurger contre un mouvement qui a conduit à de magnifiques découvertes. Mais faut-il en conclure que désormais la Géométrie synthétique doit végéter au second plan, qu'il lui est interdit de contribuer à l'édification de la haute Science? Je suis fermement convaincu du contraire, pour ma part. La conception directe des êtres de l'espace est appelée, je le crois, à rendre encore d'éclatants services. Et le jour

où les chercheurs s'orienteront dans ce sens (à cause, peut-être, de l'épuisement des mines actuellement exploitées), les travaux de Mannheim seront l'origine de belles et profondes découvertes. Il en aura fourni la matière par les nombreux problèmes dont l'énoncé se présente naturellement à la suite de ceux qu'il a considérés. Il aura montré la voie qui y mène par les modèles qu'il a laissés dans *l'art d'inventer*. C'est ainsi que son œuvre est assurée d'une vie durable, et qu'elle se relie à la science de l'avenir.

R. Bricard.

[R4a∂]

SUR LA SOLUTION D'UNE DIFFICULTÉ QUI SE PRÉSENTE DANS L'ÉTUDE DE L'ÉQUILIBRE DU TREUIL;

Par M. A. de SAINT-GERMAIN.

On sait que les théories de la Mécanique rationnelle, appliquées à des solides qu'on suppose absolument rigides, peuvent conduire à des résultats inadmissibles pour les solides naturels.

Considérons, par exemple, un solide en équilibre s'appuyant sur un plan fixe par plus de trois points : la Mécanique rationnelle conduit à ce paradoxe que les grandeurs des pressions aux points d'appui sont indéterminées. L'indétermination disparaît si l'on suppose le solide et le plan susceptibles de légères déformations qui provoquent des réactions données par la théorie de l'Élasticité; mais, sans recourir à la théorie générale, on a montré qu'il est facile de lever l'indétermination en admettant, pour les déformations

du solide et du plan, ainsi que pour les réactions élastiques, des lois particulières et très simples; voir, par exemple, APPELL, *Mécanique*, t. I, page 148.

Une anomalie du même genre se rencontre quand on étudie les conditions d'équilibre d'un solide qui a deux points fixes, A, B, et que je désignerai sous le nom de treuil.

Si l'on cherche, à l'aide des équations de la Mécanique, les forces qu'il faudrait appliquer aux points A, B, s'ils étaient libres, pour les maintenir fixes, on trouve que les projections de ces forces sur AB sont indéterminées : leur somme seule est connue. Ici encore, le paradoxe disparaît si l'on suppose le treuil susceptible de légères déformations provoquant des réactions que fera connaître la théorie générale de l'Élasticité; mais je ne sache pas qu'on ait montré, comme il a été fait pour le cas précédent, la possibilité de lever très facilement l'indétermination en faisant des hypothèses simples et bien acceptables sur les déformations du treuil et sur les réactions élastiques qui en résultent. Je me propose de le faire pour compléter, dans une certaine mesure, une des théories les plus élémentaires de la Mécanique.

Je suppose la loi des déformations dont le treuil est susceptible telle qu'une quelconque, Ω, de ses sections perpendiculaires à AB ne puisse subir qu'une translation parallèle à cette droite, et dont l'amplitude soit égale à α, comptée positivement dans le sens de AB, que je prends pour axe des z. Considérons les sections Ω_k, Ω_{k+1}, passant par les points M_k, M_{k+1} d'application de deux forces extérieures, dont les projections sur OZ soient Z_k et Z_{k+1}, et supposons qu'aucune autre force extérieure n'agisse sur la tranche du treuil comprise entre les plans de Ω_k et de Ω_{k+1}. Cette tranche

éprouvera, dans le sens de OZ, une dilatation égale à $\alpha_{k+1} - \alpha_k$, le z du point M_{k+1} étant supérieur à celui de M_k : j'admets que cette dilatation provoquera, dans la tranche considérée, une tension

$$(1) \qquad T_k = \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{Q_k}$$

parallèle à OZ : Q_k est un coefficient donné, qui dépend de l'élasticité et des dimensions de la tranche.

Supposons le treuil sollicité par n forces extérieures, appliquées en des points $M_1, M_2, \ldots, M_n$ et ayant pour composantes suivant OZ, $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$. Soient enfin Z_0 et Z_{n+1} les composantes des forces qu'il faudrait appliquer aux points A, B, supposés libres, pour les maintenir fixes. En admettant que ces points soient aux deux extrémités du treuil, nous voyons que les deux portions de ce solide comprises entre le point A et le plan Ω_1, d'une part, entre le plan Ω_n et le point B, d'autre part, sont soumises à des tensions

$$T_0 = \frac{\alpha_1}{Q_0}, \qquad T_n = -\frac{\alpha_n}{Q_n},$$

parallèles à OZ. Les tensions des autres tranches dans lesquelles on peut décomposer le treuil sont données par la formule (1).

Le point A étant en équilibre, on a l'équation

$$(2) \qquad Z_0 + \frac{\alpha_1}{Q_0} = 0.$$

Envisageons maintenant la portion du treuil comprise entre le point A et la section Ω_k : comme elle est en équilibre, la somme des projections sur OZ des forces extérieures $Z_0, Z_1, \ldots, Z_k$ et T_k est nulle : remplaçant T_k par sa valeur (1) et faisant successive-

ment k égal à 1, 2, ..., n, on a n équations :

$$(3)\quad \begin{cases} Z_0 + Z_1 + \qquad \dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{Q_1} = 0, \\ Z_0 + Z_1 + Z_2 + \dfrac{\alpha_3 - \alpha_2}{Q_2} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ Z_0 + Z_1 + \dots + Z_n - \dfrac{\alpha_n}{Q_n} = 0. \end{cases}$$

On obtient une $(n+2)^{\text{ième}}$ équation en égalant à zéro la somme des projections de toutes les forces extérieures :

$$(4)\qquad Z_0 + Z_1 + \dots + Z_n + Z_{n+1} = 0.$$

Cela posé, chassons les dénominateurs $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$ dans les équations (2) et (3), et ajoutons membre à membre toutes les équations transformées : on voit que les α_k se détruisent deux à deux, et il reste l'équation :

$$(5)\quad \begin{cases} (Q_0 + Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n) Z_0 \\ \quad + (Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n) Z_1 + \dots \\ \quad + (Q_{n-1} + Q_n) Z_{n-1} + Q_n Z_n \quad = 0. \end{cases}$$

On en déduit immédiatement Z_0. Pour avoir Z_{n+1}, on multiplie tous les termes de l'équation (4) par $Q_0 + Q_1 + \dots + Q_n$, et de l'équation ainsi formée on retranche l'équation (5) : il reste

$$(6)\quad \begin{cases} Q_0 Z_1 + (Q_0 + Q_1) Z_2 + \dots \\ \quad + (Q_0 + Q_1 + \dots + Q_{n-1}) Z_n \\ \quad + (Q_0 + Q_1 + \dots + Q_{n-1} + Q_n) Z_{n+1} = 0; \end{cases}$$

on en déduit Z_{n+1} ; les réactions en A et B sont déterminées sans ambiguïté. Enfin les équations (2) et (3) permettront de calculer successivement les déplacements $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des sections $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ par

rapport aux positions qu'elles occuperaient si le treuil n'était sollicité par aucune force extérieure : les tensions auxquelles sont soumises les diverses parties du treuil sont alors déterminées.

On pourrait imaginer que les extrémités A, B du treuil soient liées à des points non pas absolument fixes, mais faisant partie des masses extérieures et susceptibles de légers déplacements. Les projections α_0, α_{n+1} de ces déplacements sur OZ seraient deux nouvelles inconnues, mais on pourrait admettre que les composantes Z_0, Z_{n+1} soient de la forme

$$Z_0 = -\frac{\alpha_0}{\lambda}, \qquad Z_{n+1} = -\frac{\alpha_{n+1}}{\mu},$$

et le problème resterait déterminé. Il est facile de voir comment se modifieraient les équations que j'ai établies; je me contenterai de dire que, dans les équations (5) et (6), les coefficients des diverses composantes $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n, Z_{n+1}$ qui y figurent seraient augmentés de $\lambda + \mu$; Z_0 et Z_{n+1} seraient encore bien déterminées.

[M²id]

ÉTUDE DU TORE RAPPORTÉ AUX CERCLES D'YVON VILLARCEAU;

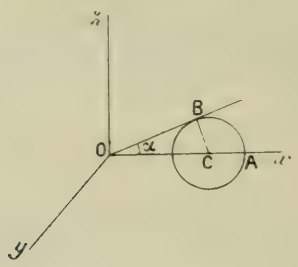
PAR M. J. HAAG.

On sait que tout plan bitangent à un tore le coupe suivant deux cercles. Quand ce plan tourne autour de l'axe de révolution, les deux cercles en question engendrent chacun une famille de cercles. Nous nous

proposons d'étudier le tore en prenant ces cercles comme courbes coordonnées.

Calcul des coordonnées d'un point quelconque. — Prenons pour axe des z l'axe de révolution et pour axes des x et des y deux diamètres rectangulaires de

Fig. 1.



l'équateur. Soit $OC = a$ la distance à l'axe du centre du cercle générateur. Soit α l'angle COB, que nous supposerons positif et plus petit que $\frac{\pi}{2}$. (Nous n'étudierons évidemment que les tores à points coniques imaginaires.) Le rayon $CB = R$ du cercle générateur est égal à $a \sin\alpha$.

Ceci étant, le plan yOB coupe le tore suivant deux cercles de rayon commun a et dont les centres sont sur Oy et ont pour ordonnée : le premier $+R$, le second $-R$, comme on le vérifie sans difficulté. Supposons qu'on fasse tourner le premier d'un angle u' autour de Oz et le second d'un angle v'. On obtiendra deux nouveaux cercles (u) et (v) dont les équations seront respectivement

$$(u) \quad \begin{cases} x \cos u' + y \sin u' - z \cot\alpha = 0, \\ (x + R \sin u')^2 + (y - R \cos u')^2 + z^2 = a^2, \end{cases}$$

et

$$(v)\quad \begin{cases} x\cos v' + y\sin v' - z\cot\alpha = 0, \\ (x - R\sin v')^2 + (y + R\cos v')^2 + z^2 = a^2. \end{cases}$$

On trouve, par un calcul facile, que ces quatre équations sont compatibles et admettent les deux solutions suivantes, où nous avons posé, pour simplifier, $u' = 2u$, $v' = 2v$:

$$x = a\cos^2\alpha\,\frac{\cos(u+v)}{1 \pm \sin\alpha\sin(u-v)},$$

$$y = a\cos^2\alpha\,\frac{\sin(u+v)}{1 \pm \sin\alpha\sin(u-v)},$$

$$z = R\cos\alpha\,\frac{\cos(u-v)}{1 \pm \sin\alpha\sin(u-v)}.$$

Il est aisé de voir que les deux points ainsi obtenus se déduisent l'un de l'autre par une inversion de centre O et de puissance $a^2\cos^2\alpha$. On peut d'ailleurs se borner à prendre le signe $+$ par exemple dans les formules précédentes, comme on le voit, en échangeant les valeurs de u et v. Nous obtenons alors les formules suivantes :

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} x = a\cos^2\alpha\,\dfrac{\cos(u-v)}{1 + \sin\alpha\sin(u-v)}, \\ y = a\cos^2\alpha\,\dfrac{\sin(u+v)}{1 + \sin\alpha\sin(u-v)}, \\ z = R\cos\alpha\,\dfrac{\cos(u-v)}{1 + \sin\alpha\sin(u-v)}, \end{cases}$$

qui peuvent encore s'écrire, en posant $u + v = \theta$ et $u - v = t$,

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} x = a\cos^2\alpha\,\dfrac{\cos\theta}{1 + \sin\alpha\sin t}, \\ y = a\cos^2\alpha\,\dfrac{\sin\theta}{1 + \sin\alpha\sin t}, \\ z = R\cos\alpha\,\dfrac{\cos t}{1 + \sin\alpha\sin t}. \end{cases}$$

Ces formules (II) montrent que θ est l'angle du plan zOx avec le plan zOM. Quant à l'angle t, on peut en donner des interprétations géométriques directes plus ou moins simples, mais dont aucune ne nous a paru intéressante. En tous cas, les courbes $\theta = \text{const.}$ sont les méridiens et les courbes $t = \text{const.}$ sont les parallèles.

Sphère contenant les deux cercles (u) *et* (v). — On trouve, par un calcul simple, que cette sphère a pour équation

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2a}{\sin t} \\ & \times (x \sin\alpha \cos t + y \sin\alpha \sin t - z \cos\alpha \cos t) - a^2 \cos^2\alpha = 0. \end{aligned}\right.$$

Elle est tangente au tore aux deux points (θ, t) et $(\theta, -t)$, d'après ce qui a été vu plus haut. Remarquons en passant que ces deux points étant inverses l'un de l'autre, ainsi que nous l'avons déjà dit, pour avoir l'inverse d'une courbe donnée par son équation en (t, θ), il suffit de changer t en $-t$ dans cette équation. Si l'équation ne change pas, on aura une courbe anallagmatique par rapport à l'origine.

L'équation (1) nous permet d'avoir simplement l'équation du plan tangent au tore au point (θ, t). Il suffit de prendre le plan tangent en ce point à la sphère. On obtient ainsi

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} & (\sin\alpha + \sin t)(X \cos\theta + Y \sin\theta) - Z \cos\alpha \cos t \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - a \cos^2\alpha \sin t = 0. \end{aligned}\right.$$

Correspondance entre les points du tore et les droites du plan des xy. — Soit U le point déduit du centre du cercle (u) en le faisant tourner de $-\frac{\pi}{2}$ dans

le plan des xy. Soit de même V le point déduit du centre du cercle (v) par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$. Les coordonnées de U sont ($R\cos 2u$, $R\sin 2u$, o) et celles de V sont ($R\cos 2v$, $R\sin 2v$, o). Nous allons faire correspondre au point M (u, v) la droite D, obtenue en joignant les deux points U et V. Cette droite a pour équation, comme on le vérifie aisément,

$$(D) \qquad x\cos\theta + y\sin\theta - R\cos t = 0.$$

Nous allons établir immédiatement une propriété de la correspondance ainsi établie.

Théorème. — *Le plan mené par* O *perpendiculaire à* OM *coupe un plan fixe perpendiculaire à* Oz *suivant une droite qui se projette suivant la droite* D *sur le plan des* xy.

En effet, l'équation du plan perpendiculaire à OM mené par O est visiblement

$$x\cos\theta + y\sin\theta + z\frac{R\cos t}{a\cos\alpha} = 0.$$

Or, si dans ce plan on fait $z = -a\cos\alpha$, on retombe sur l'équation (D). Donc le théorème est démontré et le plan fixe en question a pour équation $z = -a\cos\alpha$. C'est le plan parallèle à xOy, au-dessous de ce plan et à une distance égale à la tangente OB. Nous l'appellerons dans la suite *le plan* (Π).

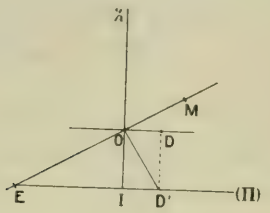
Du théorème précédent, nous allons tirer la conséquence suivante :

Théorème. — *Si la droite* D *enveloppe une courbe* S, *le point* M *décrit une courbe située sur un cône de sommet* O *et dont la base dans le plan* (Π) *est polaire réciproque de la projection de*

S *sur le même plan, par rapport à un cercle fixe* Γ *de ce plan.*

Prenons en effet pour plan de figure le plan zOM.

Fig. 2.



Désignons par (Π) et D les traces du plan (Π) et de la droite D. Soient E la trace de OM sur (Π) et I la trace de Oz. On a évidemment

$$\overline{ID'}.\overline{IE} = -\overline{OI}^2 = -a^2\cos^2\alpha.$$

Ceci suffit pour montrer que E décrit la polaire réciproque de l'enveloppe de la droite D′, projection de D sur (Π); le cercle directeur ayant pour centre I et un rayon imaginaire égal à $ia\cos\alpha$. Si l'on voulait un cercle directeur réel, il suffirait de remplacer le plan (Π) par son symétrique par rapport au plan des xy.

Il résulte de ce théorème une manière très simple de se rendre compte de la forme d'une courbe du tore donnée par son équation en t et θ. En mettant cette équation sous la forme $R\cos t = f(\theta)$, on aura l'équation de la droite D sous la forme canonique. On cherchera ensuite la polaire réciproque de l'enveloppe de cette droite, ce qui se fera immédiatement en passant en coordonnées polaires, et l'on aura une perspective de la courbe du tore. Il est bien évident, d'ailleurs, que la droite D joue ici un rôle accessoire; mais il

peut se faire cependant que sa définition simple permette de trouver immédiatement dans certains cas la courbe S, comme nous en verrons un exemple.

Élément linéaire. — Si l'on appelle r le rayon d'un parallèle, on a

$$ds^2 = dr^2 + dz^2 + r^2 d\theta^2.$$

Or,

$$r = \frac{a \cos^2 \alpha}{1 + \sin\alpha \sin t}$$

et

$$z = R \cos\alpha \frac{\cos t}{1 - \sin\alpha \sin t}.$$

On en déduit aisément

$$ds^2 = \frac{a^2 \cos^2 \alpha}{(1 - \sin\alpha \sin t)^2} (\cos^2\alpha\, d\theta^2 + \sin^2\alpha\, dt^2)$$

$$= \frac{a^2 \cos^2 \alpha}{[1 + \sin\alpha \sin(u - v)]^2} (du^2 + dv^2 + 2\, du\, dv \cos 2\alpha).$$

Cette formule montre qu'on peut faire une carte du tore de façon à faire correspondre aux cercles de Villarceau deux séries de droites parallèles. Il suffira par exemple de prendre deux axes de coordonnées OX et OY se coupant sous l'angle 2α, et de poser $X = u$ et $Y = v$. Les cercles u auront pour images des parallèles à OY et les cercles v des parallèles à OX. On en déduit immédiatement le théorème suivant :

Théorème. — *Deux cercles de Villarceau de familles différentes se coupent sous un angle constant égal à* 2α [1].

---

[1] Ceci peut s'établir géométriquement en faisant une inversion de centre situé à l'intersection de Oz avec la sphère contenant les deux cercles en question et en considérant ensuite deux cercles symétriques par rapport au plan des xy.

Dans le cas particulier où $\alpha = \frac{\pi}{4}$, les cercles de Villarceau forment un réseau orthogonal et isotherme.

De ce qui précède résulte immédiatement *l'équation générale des loxodromies* du tore. Cette équation est de la forme

$$Au + Bv + C = 0,$$

A, B, C désignant des constantes quelconques. Si l'on appelle V l'angle d'une telle courbe avec le cercle (u) [1], on a d'ailleurs

$$\operatorname{tang} V = \frac{A \sin 2\alpha}{B - A \cos 2\alpha},$$

et l'équation précédente devient

$$u \sin V + v \sin(2\alpha + V) + C = 0.$$

Il est facile de voir ce que sont ces loxodromies en passant par l'intermédiaire des droites (D). Ces droites coupent en effet le cercle (γ) de centre O et de rayon R en des points U et V d'angles polaires $2u$ et $2v$. Or on sait que, s'il existe une relation linéaire quelconque entre ces angles polaires, la droite UV enveloppe une hypocycloïde ou une épicycloïde. Si l'on appelle d'ailleurs m le rapport du rayon du cercle base au rayon du cercle roulette, ce rapport étant positif pour une épicycloïde et négatif pour une hypocycloïde, on a

$$m = -\frac{A + B}{B} = -\frac{2 \cos\alpha \sin(\alpha + V)}{\sin(2\alpha + V)},$$

---

[1] Cet angle est compté positivement dans le sens dans lequel il faut faire tourner la tangente au cercle (u) de l'angle 2α pour l'amener sur la tangente au cercle (v).

d'où l'on tire inversement

$$\operatorname{tang}(\alpha - V) = -\frac{m}{m+2}\operatorname{tang}\alpha\ (^1).$$

Enfin le cercle (γ) est, comme on sait, le cercle sur lequel roule en glissant le cercle roulette. L'enveloppe de (D) est ainsi parfaitement définie pour une valeur donnée de V, à une rotation près autour de Oz. Nous pouvons dès lors énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Les loxodromies du tore sont toutes sur des cônes ayant pour bases des polaires réciproques d'hypocycloïdes ou d'épicycloïdes.*

Comme vérifications, on trouve $m = 0$ pour $V = -\alpha$, ce qui donne les droites D tangentes à γ et par suite les parallèles sur le tore, comme il est facile de le voir. Pour $V = \pm\frac{\pi}{2} - \alpha$, on trouve $m = -2$, ce qui donne des droites D parallèles et, par suite, des méridiens sur le tore. Pour $V = 0$, on a $m = -1$, ce qui donne des droites D pour lesquelles le point U est fixe et, par suite, les cercles (u). De même, pour $V = -2\alpha$, $m = \infty$; on retrouve les cercles (v).

Courbure géodésique des cercles de Villarceau. — La forme simple de l'élément linéaire donne l'idée de calculer la courbure géodésique des courbes

$$u = \text{const.} \qquad \text{et} \qquad v = \text{const.}$$

On trouve, en appliquant une formule connue,

$$\rho_g = \frac{a}{\cos(u - v)} = \frac{a}{\cos t}.$$

---

(1) Pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$, on a $\operatorname{tang} V = -(m+1)$.

D'autre part, si l'on appelle ω l'angle du plan tangent au tore avec le plan du cercle considéré, on a, en se rappelant que le rayon d'un cercle de Villarceau est égal à a,

$$\rho_g = \frac{a}{\cos\omega}.$$

D'où

$$\cos\omega = \cos t,$$

ou

$$\omega = t.$$

D'où le théorème suivant :

Théorème. — *L'angle du plan tangent en un point avec le plan de chacun des deux cercles qui y passent est égal au double de l'angle des plans méridiens perpendiculaires aux plans des deux cercles.*

Lignes asymptotiques du tore. — Le théorème précédent nous permet de calculer immédiatement la courbure normale de la surface en un point $M(u, v)$ dans les directions $du = 0$ ou $dv = 0$. On trouve sans difficulté

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\sin t}{a}$$

en prenant comme sens positif sur la normale celui qui va de M au centre du cercle générateur. D'autre part, si φ désigne l'angle de la tangente au parallèle de M avec la tangente à une courbe quelconque passant par M, on a, d'après la formule d'Euler,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_1}\cos^2\varphi + \frac{1}{R}\sin^2\varphi.$$

En faisant $\varphi = \alpha$, on doit trouver

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\sin t}{a},$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{1}{a\cos^2\alpha}(\sin\alpha + \sin t).$$

La formule d'Euler devient alors

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}\sin^2\varphi - \frac{1}{a\cos^2\alpha}(\sin\alpha + \sin t)\cos^2\varphi.$$

Pour une ligne asymptotique, on a donc

$$\frac{1}{\sin\alpha}\sin^2\varphi - \frac{1}{\cos^2\alpha}(\sin\alpha + \sin t)\cos^2\varphi = 0.$$

D'autre part, on a aisément

$$(3) \qquad \operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\alpha\frac{dt}{d\theta}.$$

D'où l'équation des lignes asymptotiques

$$(4) \qquad \frac{dt^2}{d\theta^2} = 1 + \frac{\sin t}{\sin\alpha}.$$

Cette équation peut être obtenue directement en partant des coordonnées homogènes d'un point ou d'un plan tangent quelconque du tore et appliquant la formule connue. Mais on a des calculs plus compliqués que par la méthode précédente.

Cette équation s'écrit

$$d\theta = \frac{\pm dt}{\sqrt{1 + \frac{\sin t}{\sin\alpha}}}.$$

Elle s'intègre par les fonctions elliptiques. On trouve aisément l'équation suivante

$$(5) \qquad \operatorname{dn}\xi\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right) = \pm\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right),$$

où l'on a posé

$$\xi = \frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{2 \sin \alpha}}$$

et où le module de la fonction dn ξ est

$$k = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

On arrive, comme on voit, à une équation très simple, qui permet de se rendre compte immédiatement de la forme de la courbe. En prenant, par exemple, $\theta_0 = 0$ et prenant le signe $+$ dans l'équation (5), on a la ligne asymptotique qui passe par le point le plus haut de la méridienne de droite du plan des zx. En tenant compte de la formule (4), qui peut maintenant s'écrire

$$\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} \alpha \sqrt{1 + \frac{\sin t}{\sin \alpha}},$$

on a en chaque point l'angle φ de la tangente à la courbe avec le parallèle, ce qui permet d'étudier très exactement la forme de la courbe. On voit ainsi qu'elle part tangentiellement au parallèle supérieur, coupe le parallèle engendré par B sous l'angle α, puis arrive à l'équateur, pour $\theta = \theta_2$, avec

$$\theta_2 = \sqrt{\sin \alpha} \int_{-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\sin \alpha + \sin t}}.$$

Pour avoir le reste de la courbe, il suffit de faire une symétrie par rapport au rayon passant par le point $(\theta_2, \frac{\pi}{2})$, puis par rapport à tous les plans définis par l'angle $\theta = 2k\theta_2$. La courbe est tangente au parallèle supérieur aux points $\theta = 4k\theta_2$, et au parallèle

inférieur aux points $\theta = (4k + 2)\theta_2$. La courbe ne se fermera que si θ_2 est commensurable avec π.

Mouvement d'un point qui décrirait une asymptotique. — La forme de cette courbe, qui ressemble à celle d'un mouvement pendulaire, conduit à penser qu'elle sera décrite par un mobile soumis à une loi de forces simple. On trouve, en effet, sans difficulté, le théorème suivant :

Théorème. — *Si un mobile glissant sans frottement sur la surface du tore est attiré par l'axe suivant la force* $\frac{\lambda}{r^4}$, *le mobile décrira une asymptotique, pourvu que la vitesse initiale satisfasse aux deux conditions suivantes :*

$$\theta_0'^2 r_0^4 = \frac{2\lambda}{3am} \qquad \text{et} \qquad v_0^2 = \frac{2\lambda}{3mr_0^2}.$$

λ désigne une constante arbitraire et m la masse du mobile; r est sa distance à l'axe. On peut remarquer que pour une même loi de forces la vitesse initiale ne dépend pas du tore; elle ne dépend que de la distance initiale du mobile à l'axe. La constante des aires ne dépend pas, au contraire, de cette distance initiale; elle ne dépend que de la distance a du centre du cercle générateur à l'axe.

Longueur d'un arc d'asymptotique. — Il suffit de remplacer dans l'élément linéaire de la surface $d\theta$ par sa valeur en fonction de t et dt. On trouve alors qu'en posant

$$\sigma = \frac{s}{a}\sqrt{\frac{2}{\sin\alpha}}$$

et prenant l'origine des arcs sur le parallèle du point B,

on a

$$\operatorname{cn}\sigma = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right),$$

le module de $\operatorname{cn}\sigma$ étant d'ailleurs $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Géodésiques du tore. — Elles nous sont données par la formule de Clairaut :

$$r \sin i = \mathrm{B} \qquad (\mathrm{B} = \text{const.}).$$

On en déduit aisément l'équation suivante, où nous avons posé $\mathrm{B} = \mathrm{R}\,\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\mathrm{A}$,

$$d\theta = \frac{\mathrm{A}\operatorname{tang}\alpha(1 + \sin\alpha\sin t)\,dt}{\sqrt{1 - \mathrm{A}^2(1 + \sin\alpha\sin t)^2}},$$

qui s'intègre encore par les fonctions elliptiques. Indiquons simplement les résultats.

Premier cas : $\mathrm{A} < \frac{1}{1 + \sin\alpha}$. — Si λ désigne un paramètre variable, les équations paramétriques de la géodésique qui correspond, à une rotation près, à une valeur donnée de A, sont

$$1 + \sin\alpha\sin t = -\frac{1}{\mathrm{A}} + \left[\left(1 + \frac{1}{\mathrm{A}}\right)^2 - \sin^2\alpha\right]\frac{1}{\operatorname{sn}^2\lambda - \dfrac{1 + \sin\alpha + \frac{1}{\mathrm{A}}}{2\sin\alpha}},$$

$$\frac{\theta}{\operatorname{tang}\alpha} = -\frac{\lambda}{\mathrm{A}g} + \frac{\left(1 + \frac{1}{\mathrm{A}}\right)^2 - \sin^2\alpha}{g}\int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\operatorname{sn}^2\lambda - h^2}$$

$$= -\frac{\lambda}{\mathrm{A}g} + \frac{\left(1 + \frac{1}{\mathrm{A}}\right)^2 - \sin^2\alpha}{g}\left[\lambda\left(\frac{\zeta b}{\operatorname{sn} b\operatorname{sn}' b} - \frac{1}{h^2}\right) + \frac{\log\dfrac{\sigma(b - \lambda)}{\sigma(b + \lambda)}}{2\operatorname{sn} b\operatorname{sn}' b}\right.$$

avec

$$g = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{A} - \sin\alpha\right)^2 - 1}, \qquad h^2 = \frac{\sin\alpha + \frac{1}{A}}{2\sin\alpha},$$

$$\operatorname{sn} b = h.$$

Les fonctions ζ et σ introduites dans le crochet sont les fonctions bien connues relatives à la fonction $\operatorname{sn}\lambda$ qui entre dans ces équations et dont le module est

$$k = 2\sqrt{\frac{\sin\alpha}{A\left[\left(\frac{1}{A} - \sin\alpha\right)^2 - 1\right]}}.$$

Second cas : $A > \frac{1}{1 + \sin\alpha}$. — On a alors les équations suivantes :

$$1 - \sin\alpha \sin t = -\frac{1}{A} - \frac{2}{A}\left(\frac{1}{A} + 1 - \sin\alpha\right)\frac{1}{\operatorname{sn}^2\lambda - h'^2},$$

$$\frac{\theta}{\operatorname{tang}\alpha} = -\frac{1}{Ag'}\lambda + \frac{2\left(\frac{1}{A} + 1 - \sin\alpha\right)}{\sqrt{A\sin\alpha}}\int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\operatorname{sn}^2\lambda - h'^2}$$

$$= -\frac{1}{A}\sqrt{\frac{A}{\sin\alpha}}\lambda + \frac{2\left(\frac{1}{A} + 1 - \sin\alpha\right)}{\sqrt{A\sin\alpha}}\left[\lambda\left(\frac{\zeta b'}{\operatorname{sn} b' \operatorname{sn}' b'} - \frac{1}{h'^2}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\operatorname{sn} b' \operatorname{sn}' b'}\log\frac{\sigma(b' - \lambda)}{\sigma(b' + \lambda)}\right]$$

avec

$$g' = \sqrt{\frac{\sin\alpha}{A}}, \qquad h'^2 = \frac{2}{A(\sin\alpha - 1) + 1},$$

$$\operatorname{sn} b' = h', \qquad k = \frac{1}{k}.$$

Cas intermédiaire : $A = \frac{1}{1 + \sin\alpha}$. — Il y a alors dégénérescence. On trouve, dans ce cas, les équations

suivantes, où φ désigne un paramètre variable :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right) = \pm \frac{\operatorname{sh}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{sh}\frac{\varphi_0}{2}},$$

$$0 = \varphi \operatorname{tang}\alpha + \frac{\operatorname{tang}\alpha}{2}\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha}} \log \frac{\operatorname{sh}\frac{\varphi_0 - \varphi}{2}}{\operatorname{sh}\frac{\varphi_0 + \varphi}{2}},$$

en posant

$$\operatorname{sh}\frac{\varphi_0}{2} = \sqrt{\sin\alpha}.$$

[L² 17 d]

QUASI-DÉVELOPPÉES DES SURFACES DU SECOND ORDRE ;

PAR M. D. TABACOFF.

Dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (4e série, mars 1905, page 97) M. Arthur Maluski a publié des considérations très élégantes sur les quasi-développées des sections coniques. En suivant sa méthode, nous allons étendre ses recherches aux quasi-développées des surfaces de second ordre. Pour définir une quasi-développée d'une surface (S) du second ordre par rapport à une autre surface du second ordre (S′), nous établirons une correspondance univoque entre chaque plan tangent à (S) avec un autre plan. En effet, soit (α) le plan tangent en un point (M) de (S). Ce point (M) a toujours un plan polaire (Π) par rapport à la surface (S′). Appelons (d) la droite d'intersection des deux plans (Π) et (α). Il est évident qu'on peut mener par (M) seulement un plan (α'), parallèle

à (d) et conjugué à (α) par rapport à la surface (S'). Il suit de là que, si le point (M) décrit la surface (S), le plan (α') ainsi choisi enveloppera une surface (Q) que nous appellerons *quasi-développée de* (S) *par rapport à* (S'). En nous rappelant que, par définition, (α') passe par le pôle de (α) par rapport à (S'), et que le pôle de (α') par rapport à (S') est un point situé sur le cône circonscrit à la surface (S) et ayant pour base l'intersection de (α') avec (S), nous pouvons aborder l'étude de la surface en question.

L'équation générale d'une surface (S) du second degré en coordonnées tétraédriques est

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} F(x, y, z, t) = {} & a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}t^2 \\ & + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}xt \\ & + 2a_{23}yz + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt = 0. \end{aligned}\right.$$

Soit

$$(2)\qquad ux + vy + wz + rt = 0$$

l'équation du plan (α').

D'autre part, l'équation du cône circonscrit à la surface (S), et qui a pour base le plan (α'), est la suivante :

$$(3)\qquad HF(x, y, z, t) + \delta(ux + vy + wz + rt)^2 = 0.$$

où δ est le discriminant de $F(x, y, z, t)$ et

$$H = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & v \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & w \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & r \\ u & v & w & r & 0 \end{vmatrix}.$$

Soit

$$\Phi(u, v, w, r) = 0$$

l'équation tangentielle de la surface (S'). D'après les explications que nous avons données au début, il faut et il suffit que les coordonnées du pôle de (α') par rapport à (S') satisfassent à l'équation (3). Ces coordonnées sont données par les relations

$$(4) \qquad x = \Phi'_u, \qquad y = \Phi'_v, \qquad z = \Phi'_w, \qquad t = \Phi'_r.$$

La condition cherchée sera

$$(5) \qquad \mathrm{HF}(\Phi'_u, \Phi'_v, \Phi'_w, \Phi'_r) + 4\delta[\Phi(u, v, w, r)]^2 = 0.$$

Il s'ensuit que la surface définie au commencement est de quatrième classe.

Remarque. — Si les deux surfaces sont tangentes en un point (M), la surface (5) se décompose en un point (M) et une surface de troisième classe. Si les surfaces (S) et (S') sont bitangentes, la surface (5) se décompose en deux points et une surface de seconde classe. Enfin, si les surfaces (S) et (S') se coupent, il est clair que la courbe d'intersection appartiendra à la surface (5).

Rapportons maintenant les surfaces (S) et (S') à leur tétraèdre conjugué commun, de façon qu'on ait

$$\mathrm{F}(x, y, z, t) \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0,$$
$$\Phi(u, v, w, r) \equiv a_1 u^2 + b_1 v^2 + c_1 w^2 + d_1 r^2 = 0.$$

Dans ce cas, nous avons

$$\Phi'_u = 2a_1 u, \qquad \Phi'_v = 2b_1 v, \qquad \Phi'_w = 2c_1 w, \qquad \Phi'_r = 2d_1 r,$$
$$\mathrm{F}(\Phi'_u, \Phi'_v, \Phi'_w, \Phi'_r) = 4[aa_1^2 u^2 + bb_1^2 v^2 + cc_1^2 w^2 + dd_1^2 r^2].$$

$$\mathrm{H} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & u \\ 0 & b & 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & c & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 & d & r \\ u & v & w & r & 0 \end{vmatrix} = -abcr^2 - abdw^2 - acdv^2 - bcdu^2,$$

et

$$\delta = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = abcd.$$

Après la substitution de ces valeurs dans l'équation (5), nous obtiendrons l'équation tangentielle de la surface quasi-développée. Son équation sera

$$(5') \left\{ \begin{aligned} & cd(aa_1 - bb_1)^2 u^2 v^2 + bd(aa_1 - cc_1)^2 u^2 w^2 \\ & + bc(aa_1 - dd_1)^2 u^2 r^2 - ad(bb_1 - cc_1)^2 v^2 w^2 \\ & - ac(bb_1 - dd_1)^2 v^2 r^2 + ab(cc_1 - dd_1)^2 w^2 r^2 = 0 \end{aligned} \right.$$

ou

$$(5'') \quad A u^2 v^2 + B u^2 w^2 - C u^2 r^2 - D v^2 w^2 + E v^2 r^2 + F w^2 r^2 = 0,$$

en posant

$$\begin{aligned} A &= cd(aa_1 - bb_1)^2, & B &= bd(aa_1 - cc_1)^2, \\ C &= bc(aa_1 - dd_1)^2, & D &= ad(bb_1 - cc_1)^2, \\ E &= ac(bb_1 - dd_1)^2, & F &= ab(cc_1 - dd_1)^2. \end{aligned}$$

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On donne les deux paraboles qui, dans un système d'axes rectangulaires, ont pour équations*

$$(z - a)^2 - 2px = 0, \qquad (z - b)^2 - 2qy = 0.$$
$$y = 0; \qquad z = 0.$$

Les droites s'appuyant sur ces courbes dépendent de deux paramètres. Si l'on établit entre ces paramètres une re-

lation convenable, les droites considérées engendrent une surface développable.

1° *Déterminer les surfaces développables ainsi obtenues;*

2° *Il existe une de ces surfaces développables qui ne se réduit pas, en général, à un cône. Soient* S *cette surface,* M *un point de l'arête de rebroussement de cette surface,* P *le point où le plan osculateur en* M *à l'arête de rebroussement rencontre l'axe* Oz. *Si* t *désigne la troisième coordonnée* z *du point* P, *exprimer les coordonnées du point* M *en fonction de* t.

3° *Le plan osculateur en* M *à l'arête de rebroussement de la surface* S *coupe le plan* xOy *suivant une droite* Δ *qui a une enveloppe* C. *Soit* N *le point où la droite* Δ *touche son enveloppe* C. *Exprimer les coordonnées de* N *en fonction de* t.

4° *Que devient la développable* S *lorsque* $a = b$?

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale triple*

$$\iiint (2x + 3y + 6z)^2 \, dx \, dy \, dz,$$

prise à l'intérieur du volume limité par l'ellipsoïde qui, dans un système d'axes rectangulaires, a pour équation

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 - 1 = 0.$$

(Juillet 1906)

Épreuve théorique. — *Soit le paraboloïde* S *dont les coordonnées d'un point variable s'expriment en fonction des deux paramètres* λ *et* φ *par les formules*

$$x = 2\lambda p \cos\varphi,$$
$$y = 2\lambda q \sin\varphi,$$
$$z = 2\lambda^2(p \cos^2\varphi + q \sin^2\varphi),$$

p, q *désignant des constantes données.*

1° *Quelle relation faut-il établir entre* λ *et* φ *pour que la courbe correspondante* C, *tracée sur la surface* S, *soit telle que le plan tangent à la surface* S *le long de cette courbe fasse un angle constant avec le plan des* xy?

2° *Soit* C *l'une de ces courbes; le plan tangent à* S *le long de* C *engendre une surface développable* Σ. *Montrer que les génératrices de cette développable font un angle constant avec* Oz. *Exprimer les coordonnées d'un point de l'arête de rebroussement en fonction du paramètre* φ.

3° *Déterminer sur la développable* Σ *les courbes qui, en chaque point, sont normales à la génératrice (de* Σ*) passant par ce point. Montrer que ces courbes sont planes et que leurs projections sur le plan des* xy *ont pour développée la projection sur ce même plan de l'arête de rebroussement de* Σ.

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x(1+x)\,dx}{(1+2x+2x^2)^2}.$$

Épreuve théorique. — I. *Énoncer et démontrer le théorème des résidus relatif à l'intégrale* $\int f(z)\,dz$, *prise le long d'un contour fermé, à l'intérieur duquel* $f(z)$ *est uniforme et n'admet que des singularités isolées. Application à l'intégrale*

$$\int \frac{dz}{(z-1)^2(z-2)^3\sqrt{z+5}},$$

prise le long d'un cercle de rayon 4 *ayant pour centre l'origine.*

II. *Un plan a pour équation en coordonnées rectangulaires*

$$X\cos\theta\cos\varphi + Y\cos\theta\sin\varphi + Z\sin\theta = f(\theta),$$

où θ *et* φ *sont deux paramètres variables indépendants, et* $f(\theta)$ *une fonction donnée du seul paramètre* θ. *Déterminer en fonction de* θ *et* φ *les coordonnées d'un point de contact de ce plan avec son enveloppe, et trouver les lignes de courbure de cette surface enveloppe.*

Épreuve pratique. — *On considère l'ellipse qui, dans un système d'axes rectangulaires, a pour équation*

$$x^2 + 3y^2 = 6y,$$

et la droite Δ *qui, dans le même système d'axes, a pour équation*

$$x = y.$$

La droite Δ *divise l'aire de l'ellipse en deux aires partielles,* A *et* B, *dont on demande de calculer le rapport* $\frac{A}{B}$.

(Novembre 1906.)

Grenoble.

Épreuve théorique. — *Recherche générale des développées d'une courbe* S *donnée.*

Développées d'une courbe plane : leur nature.

Développées d'une parabole.

Épreuve pratique. — 1° *Intégrer l'équation*

$$y = 2xy' + y'^2.$$

Trouver une courbe intégrale passant par un point donné dans le plan; condition de possibilité.

Solution singulière.

2° *Intégrer l'équation*

$$px + qy = k\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Montrer que toute surface intégrale est engendrée par une droite qui se meut en rencontrant l'axe Oz *et en faisant un angle constant avec cet axe.*

Trouver une surface intégrale passant par une hélice circulaire ayant Oz *pour axe.*

Quelle valeur faut-il donner à K *pour que l'hélicoïde à plan directeur soit une surface intégrale?*

(Novembre 1906.)

Lille.

Épreuve théorique. — 1° *Série à double entrée. Énoncer et démontrer le théorème relatif à la convergence d'une pareille série, quand les modules des termes forment une série double convergente, pour un mode particulier de sommation. Appliquer ce théorème au calcul du produit*

de deux séries linéaires, toutes deux absolument convergentes.

2° *Déterminer dans un plan une courbe telle que la tangente et la normale en un point quelconque* M *de la courbe interceptent sur la perpendiculaire élevée au point fixe* O *sur le rayon vecteur* OM *une longueur égale à* $\frac{2\overline{OM}^2}{a}$, *a désignant une longueur donnée.*

Construire et rectifier une de ces courbes.

(Novembre 1906.)

Marseille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Étant donnée la surface de révolution autour de l'axe des z définie par les équations*

$$x = l \cos\varphi \cos\theta,$$
$$y = l \sin\varphi \cos\theta,$$
$$z = l \log \operatorname{tang}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - l \sin\theta,$$

où l est une constante donnée, calculer les cosinus des angles a, b, c que fait avec les axes de coordonnées la normale à la surface en un point défini par les valeurs des deux paramètres variables θ *et* φ.

2° *Sur cette surface on considère toutes les courbes satisfaisant à la relation différentielle*

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\sqrt{c}\sin\theta}{\cos^2\theta\sqrt{l^2\cos^2\theta - c}},$$

où c est une constante quelconque. Calculer, pour l'une de ces courbes :

Le ds^2;

Les cosinus des angles α, β, γ *que fait la tangente en un point avec les axes;*

Les différentielles $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$, $d\cos\gamma$;

Le rayon de courbure R *de la courbe;*

Et enfin les cosinus des angles ξ, η, ζ *que fait la normale principale à la courbe avec les axes.*

3° *Démontrer, en comparant* $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ *aux résul-*

tats trouvés dans la première partie, que les lignes considérées sont les lignes géodésiques de la surface.

SOLUTION.

Voir la Solution de la question d'Analyse du Concours d'agrégation de 1905 par M. Sicard dans le numéro de décembre 1905.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Les coordonnées étant rectangulaires, on détermine, sur le paraboloïde dont l'équation est*

$$z = \mathrm{K}\frac{y}{x},$$

une aire quadrilatère limitée par quatre génératrices. Deux de ces génératrices sont des axes de coordonnées; les deux autres sont situées respectivement dans les plans dont les équations sont

$$x = 1 \qquad \text{et} \qquad z = 2.$$

Calculer, en fonction de K, *le volume du cylindre compris entre le quadrilatère et sa projection sur le plan des yz.*

2° *Calculer* K *et achever le calcul numérique sachant que le paraboloïde se raccorde le long de l'axe des z avec les surfaces définies par les équations*

$$x = t^2(1 + u_1)z + t\,(1 + u_2),$$
$$y = t\,(2 + u_3)z + t^2(1 + u_4),$$

où u_1, u_2, u_3, u_4 *sont des fonctions uniformes du paramètre variable t qui s'annulent pour* $t = 0$.

SOLUTION.

$$\mathrm{V} = \frac{1}{\mathrm{K}}\int_0^1 x\,dx \int_0^2 z\,dz,$$

$$\mathrm{K} = \frac{1}{2}, \qquad \mathrm{V} = 2.$$

(Novembre 1906.)

Montpellier.

Épreuve théorique. — *On donne trois axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz.

1° *Trouver une surface* S *telle que,* M *étant un point quelconque de* S, P *la projection de* M *sur le plan des* xy, Q *la projection de* M *sur* Oz, *le plan tangent en* M *à* S *soit parallèle à la droite* PQ.

2° *Chercher si, parmi les surfaces* S *obtenues, il y en a qui sont de révolution autour de* Oz.

3° *Trouver, parmi les surfaces* S *obtenues, une surface passant par la courbe ayant pour équations*

$$z = 1, \qquad y = x \operatorname{L} x.$$

4° *Trouver les lignes asymptotiques de la surface qui vient d'être obtenue au* 3°.

Épreuve pratique. — *On considère en coordonnées rectangulaires la surface*

$$z = \frac{1}{x} e^{\frac{y}{x}}.$$

Évaluer, à 0,001 *près, le volume compris entre cette surface, le plan des* xy, *le plan des* xz, *le plan* $y = 2x$ *et le plan* $x = 300$. (Juillet 1906.)

Épreuve théorique. — I. *Étant donnés deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *trouver une courbe telle que,* M *étant un point de cette courbe,* P *la projection de* M *sur* Ox, Q *l'intersection de la tangente en* M *avec* Ox, *on ait*

$$\overline{OP} \cdot \overline{PM} = PQ^2.$$

II. *Étant donnés deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *trouver une courbe telle que,* M *étant un point quelconque de cette courbe,* P *la projection de* M *sur* Ox, N *l'intersection de la normale en* M *avec* Ox, C *le centre de courbure correspondant à* M, G *la projection de* C *sur* Ox, *on ait*

$$\overline{GN} = \overline{PM}.$$

Épreuve pratique. — *Évaluer, à* 0.1 *près, la valeur de l'intégrale*

$$\iint \frac{dx\,dy}{x\sqrt{|y|}},$$

étendue à la portion de l'ellipse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$$

comprise entre les droites

$$x = 1, \qquad x = 2.$$

(Novembre 1906.)

Épreuve théorique. — *Une fonction analytique de la variable* $z = x + yi$ *étant représentée par* $f(z) = P + Qi$:

Démontrer qu'il existe une fonction analytique qui vérifie la relation

$$P - Q = \frac{\cos x + \sin x - e^{-y}}{2\cos x - e^{y} - e^{-y}},$$

et qui s'annule pour $z = \frac{\pi}{2}$.

Déterminer les fonctions P *et* Q *des variables* x *et* y, *et la fonction* $f(z)$.

Calculer l'intégrale

$$\int_0^z \frac{dz}{f(z)},$$

et déterminer les diverses valeurs qu'elle prend quand la variable varie de 0 *à* z *par un contour arbitraire.*

Épreuve pratique. — *Déterminer l'intégrale générale de l'équation différentielle*

$$x^4 \frac{d^3y}{dx^3} + 2x^3 \frac{d^2y}{dx^2} - x^2 \frac{dy}{dx} + xy = (x - a)^2.$$

(Novembre 1906.)

Toulouse.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *On considère l'expression*

$$(1)\qquad \left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\right)dx+\left(x\frac{\partial z}{\partial y}+x-2xy+2yu\right)dy,$$

dans laquelle z désigne une fonction des deux variables indépendantes x et y, et u le résultat $f(z-x)$ de la substitution de $z-x$ à t dans la dérivée $f'(t)$ d'une fonction donnée $f(t)$ de la lettre t.

1° *Former et intégrer l'équation aux dérivées partielles que doit vérifier z pour que l'expression* (1) *soit une différentielle exacte.*

2° *Déterminer l'intégrale de cette équation aux dérivées partielles qui, pour $x=0$, se réduit à y^2; montrer qu'elle est indépendante de la fonction f, et intégrer la différentielle obtenue en la substituant à la place de z dans l'expression* (1).

II. *Déterminer l'aire de la portion de la surface, représentée en coordonnées cartésiennes rectangulaires par l'équation*

$$z=\frac{\sqrt{2}}{3}(x+y)^{\frac{3}{2}},$$

qui se projette sur le plan des xy à l'intérieur du triangle dont les trois côtés ont respectivement pour équations

$$x=0,\qquad y=0,\qquad x+y=3.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer, à l'aide de la théorie des résidus, l'intégrale*

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{Log} x}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

(Novembre 1906.)

CERTIFICATS DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

Lille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — PREMIÈRE QUESTION. — *Définition et propriété de la torsion géodésique; faire voir que l'angle de torsion géodésique est égal à celui sous lequel se coupent deux sphères infiniment voisines; démontrer que les lignes de courbure se conservent dans les transformations par inversion.*

DEUXIÈME QUESTION. — 1° *Démontrer que les équations*

$$x = v\cos u, \qquad y = v\sin u, \qquad z = \varphi(u) + v\psi(u)$$

définissent la surface réglée S *la plus générale, ayant une direction rectiligne; donner le sens géométrique des fonctions* φ, ψ.

2° *Former et intégrer l'équation des trajectoires orthogonales des génératrices; peut-on disposer des fonctions* φ, ψ *de telle sorte que ces trajectoires se projettent, sur le plan* XOY, *suivant les conchoïdes d'une même courbe,* C? (*le pôle étant au point* O).

3° *Former l'équation des lignes asymptotiques de* S; *montrer,* a priori, *que cette équation s'intègre par deux quadratures; achever l'intégration dans le cas particulier où la fonction* ψ *est de la forme*

$$\psi = a\cos u + b\sin u$$

(*a et b étant constants*); *dans ce cas particulier, peut-on disposer de la fonction* φ *de telle sorte que les asymptotiques se projettent sur* XOY *suivant des cercles passant par le point* O? (Juillet 1906.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Propriétés des lignes tracées sur une surface développable, considérée comme lieu des tangentes à une ligne à double courbure.*

2° *Chercher la relation qui existe, le long de toute ligne*

géodésique tracée sur une surface développable, entre la courbure, la torsion et l'inclinaison sur la génératrice rectiligne. (Novembre 1906.)

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Déterminer la position d'équilibre relatif du châssis d'une automobile dans le cas d'une accélération constante en palier.*

II. *Étudier les variations de la tension dans une transmission par courroie entre deux arbres parallèles.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Dans l'étude des oscillations verticales du centre de gravité du châssis, établir les formules qui donnent la durée de ces oscillations et la loi de leurs amplitudes successives.*

II. *Sachant que, dans une automobile, le poids suspendu* P' *est de* 800^{kg}, *que les flèches spécifiques des ressorts à l'avant et à l'arrière sont respectivement* $a_1 = 2^{cm},5$ *et* $a = 2^{cm},7$ *pour* 100^{kg}, *et que la durée des oscillations verticales montantes est* $t = \frac{1}{4}$ *de seconde, on demande de déterminer pour cette voiture le coefficient de frottement propre des ressorts.*

III. *Déterminer pour cette même voiture quelle doit être la valeur limite de l'écart initial* OM_0 *du centre de gravité, relativement à sa position d'équilibre* O : 1° *pour que le mouvement oscillatoire s'arrête à la fin de la première montée* M_0M_1 ; 2° *pour que ce mouvement s'arrête après une montée* M_0M_1 *et une descente* M_1M_2.

(Novembre 1906.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2044.

(1906, p. 384.)

On donne une ellipse inscrite à un triangle ABC *et un point* O *sur cette courbe. Les droites* OB, OC *interceptent, sur une parallèle à la tangente en* O, *un segment de grandeur constante lorsque* BC *est déplacé en restant tangent à l'ellipse.* (*Canon.*)

SOLUTION

Par M. Letierce.

Quand BC se déplace comme il est indiqué, les droites OB et OC engendrent deux faisceaux homographiques ayant un seul rayon double suivant la tangente en O à la conique; donc ces deux faisceaux déterminent, sur une parallèle à cette tangente, deux divisions homographiques ayant un seul point double à l'infini, par suite, le segment compris entre deux points correspondants quelconques est constant. C. Q. F. D.

Solutions semblables de MM. J. Rose et Valère Maës.

QUESTIONS.

2072. Construire un quadrilatère, connaissant les centres de gravité des quatre triangles formés par trois sommets du quadrilatère. (Dr J. de Vries.)

2073. On donne dans le plan d'un triangle ABC deux points P_1 et P_2. Sur BC on détermine un point A′ tel que $A'P_1$ et $A'P_2$ soient conjuguées harmoniques par rapport à A′A et BC. On détermine d'une façon analogue les points B′ et C′ sur CA et sur AB. Démontrer que les droites AA′, BB′, CC′ sont concourantes. (Dr J. de Vries.)

[120a]

SUR LA COMPOSITION DES FORMES QUADRATIQUES;

PAR M. T. LALESCO.

1. Je désignerai dans cette Note par

$$(a, b, c)$$

la forme quadratique binaire à coefficients entiers

$$ax^2 + bxy + cy^2.$$

Le déterminant de cette forme est $D = b^2 - 4ac$.

La théorie de la *composition* des formes quadratiques binaires repose sur quelques principes que je rappellerai tout d'abord.

Soient (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) deux formes de même déterminant D; on dit qu'elles sont *composables* si les nombres a_1, a_2 et $\frac{b_2 + b_1}{2}$ sont premiers dans leur ensemble. On peut, dans ce cas, trouver d'une infinité de manières deux entiers B et C tels que

$$(a_1, b_1, c_1) \underset{\times}{\sim} (a_1, B, a_2 C) \quad \text{et} \quad (a_2, b_2, c_2) \underset{\times}{\sim} (a_2, B, a_1 C),$$

le signe $\underset{\times}{\sim}$ désignant l'équivalence de deux formes.

Le nombre B satisfait visiblement aux congruences

$$B \equiv b_1 \pmod{2a_1}, \quad B \equiv b_2 \pmod{2a_2}, \quad B^2 \equiv D \pmod{4a_1 a_2}.$$

Les formes $(a_1, B, a_2 C)$ et $(a_2, B, a_1 C)$, telles que le dernier coefficient de chacune soit divisible par le premier coefficient de l'autre, sont dites *immédiatement composables*, et la forme

$$(a_1, a_2, BC)$$

est dite *leur forme composée*. C'est aussi *une* forme composée des deux formes initiales (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2). Toutes les formes composées de deux formes composables sont équivalentes entre elles.

L'intérêt de ces considérations résulte du fait que, si deux nombres sont représentables respectivement par les formes (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2), leur produit est représentable par la forme composée (a_1, a_2, BC). Cela résulte d'une identité due à Gauss, et qui généralise l'identité suivante de Lagrange :

$$(x^2 + \mathrm{A}y^2)(x'^2 + \mathrm{A}y'^2) = (xx' + \mathrm{A}yy')^2 + \mathrm{A}(xy' - x'y)^2.$$

Pour toutes ces généralités, je renvoie le lecteur au Xe Supplément des *Vorlesungen über Zahlentheorie* de Dirichlet-Dedekind. La terminologie dont il est fait usage ici est empruntée au Cours professé au Collège de France en 1906-1907 par M. G. Humbert sur les applications de l'Analyse à la Théorie des nombres.

2. Le théorème fondamental de la théorie de la composition est le suivant :

Toutes les formes composables qui sont respectivement équivalentes à deux formes fixes ont pour composées des formes équivalentes à une forme fixe.

La démonstration de cette proposition, telle qu'on la présente d'ordinaire, exige des calculs longs et fastidieux. Le but de cette Note est de montrer qu'on peut l'établir simplement en s'appuyant sur le lemme suivant :

Deux formes (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) composables et qui sont équivalentes jouissent de la propriété caractéristique suivante :

Il existe deux entiers x et y qui satisfont à la fois aux conditions

$$(1)\qquad \begin{cases} x^2 - Dy^2 = 4a_1a_2, \\ x + b_1y \equiv 0 \pmod{2a_1}, \\ x - b_2y \equiv 0 \pmod{2a_2}. \end{cases}$$

D *étant le déterminant commun des deux formes.*

Mettons en effet les deux formes sous la forme immédiatement composable et écrivons qu'elles sont équivalentes; nous obtenons

$$(2)\qquad \begin{cases} a_1 = a_2\alpha^2 + B\alpha\gamma + a_1C\gamma^2, \\ B = 2a_2\alpha\beta + B(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2a_1C\gamma\delta, \\ a_2C = a_2\beta^2 + B\beta\delta + a_1C\delta^2, \end{cases}$$

où α, β, γ et δ sont des entiers satisfaisant à la relation

$$(3)\qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Multiplions la première égalité par β, la seconde par α et retranchons; nous obtenons, en tenant compte de (3), la relation

$$(4)\qquad C\gamma + \beta = 0$$

et celle-ci réduit les trois égalités (2) à la relation unique

$$(5)\qquad a_2\alpha + B\gamma - a_1\delta = 0,$$

et (3) à

$$(6)\qquad \alpha\delta - C\gamma^2 = 1.$$

Des égalités (5) et (6) on déduit

$$(7)\qquad \begin{cases} 2a_1\delta = B\gamma \pm \sqrt{4a_1a_2 + D\gamma^2}, \\ 2a_2\alpha = -B\gamma \pm \sqrt{4a_1a_2 + D\gamma^2}, \end{cases}$$

les signes se correspondant dans ces formules. On a

donc, puisque α et δ sont entiers, et en posant $u = \pm\sqrt{4a_1a_2 + D\gamma^2}$,

$$(8)\qquad \begin{cases} 4a_1a_2 + D\gamma^2 = u^2, \\ B\gamma + u \equiv 0 \pmod{2a_1}, \\ -B\gamma + u \equiv 0 \pmod{2a_2}. \end{cases}$$

Les relations (1) sont ainsi établies, car on a, comme il est bien connu :

$$(9)\quad B \equiv b_1 \pmod{2a_1} \quad \text{et} \quad B \equiv b_2 \pmod{2a_2}.$$

Réciproquement, prenons deux formes (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) composables et de même déterminant D, et supposons les relations (1) vérifiées pour des valeurs entières de x et y. Les formes étant composables, nous pourrons déterminer le nombre B de manière à satisfaire aux congruences (9); les relations (1) entraînent alors les relations (8). Les congruences (8) écrites comme égalités reviennent à (7) et celles-ci par soustraction et multiplication nous donnent les relations (5) et (6); si maintenant nous déterminons β par la relation (4), on en déduira les relations (2), ce qui prouve bien que les (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) sont équivalentes.

3. Le théorème fondamental de la composition des formes s'en déduit facilement.

Soient (a_1, b_1, c_1) et (m_1, n_1, l_1) deux formes d'une classe K_1, et (a_2, b_2, c_2) et (m_2, n_2, l_2) deux formes d'une classe K_2, les classes K_1 et K_2 étant primitives.

Supposons les formes (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) composables et soit (a_1, a_2, B, C) la forme composée et de même soit (m_1, m_2, N, L) la forme composée de (m_1, n_1, l_1) et (m_2, n_2, l_2). Il s'agit de démontrer

que les deux formes (a_1, a_2, B, C) *et* (m_1, m_2, N, L) *sont aussi équivalentes.*

On peut d'abord supposer les nombres a_1 *et* a_2 *premiers à* m_1 *et* m_2. En effet, puisque les classes K_1 et K_2 sont primitives, on pourra déterminer dans la première classe une forme $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ et dans la seconde classe la forme $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ de manière que α_1 et α_2 soient premiers entre eux et premiers aux nombres a_1, a_2, m_1, m_2, et il suffira évidemment de démontrer que la composée de ce dernier couple appartient à la même classe que chacune des deux formes composées que nous avons considérées.

Dans ces conditions, les formes (a_1, b_1, c_1) et (m_1, n_1, l_1) sont donc composables et équivalentes, ainsi que les formes (a_2, b_2, c_2) et (m_2, n_2, l_2); nous aurons donc les relations

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{array}{ll} x_1^2 - Dy_1^2 = 4a_1m_1, & x_2^2 - Dy_2^2 = 4a_2m_2, \\ x_1 - b_1y_1 \equiv 0 \pmod{2a_1}, & x_2 + b_2y_2 \equiv 0 \pmod{2a_2}, \\ x_1 - n_1y_1 \equiv 0 \pmod{2m_1}, & x_2 - n_2y_2 \equiv 0 \pmod{2m_2}. \end{array}\right.$$

D'autre part, les formes composées (a_1, a_2, B, C) et (m_1, m_2, N, L) sont aussi composables, puisque les nombres a_1a_2 et m_1m_2 sont premiers entre eux. Donc, d'après la réciproque du théorème précédent, ces formes seront équivalentes si les relations

$$(\beta)\quad \left\{\begin{array}{ll} X^2 - DY^2 = 4a_1a_2m_1m_2, & \\ X + BY \equiv 0 & \pmod{2a_1a_2}, \\ X - NY \equiv 0 & \pmod{2m_1m_2} \end{array}\right.$$

sont satisfaites pour des valeurs entières de X et Y. Or, en multipliant les deux égalités (α), on obtient

$$\left(\frac{x_1x_2 + Dy_1y_2}{2}\right)^2 - D\left(\frac{x_2y_1 + y_2x_1}{2}\right)^2 = 4a_1a_2m_1m_2.$$

Les expressions

$$X = \frac{x_1 x_2 + D y_1 y_2}{2}$$

et

$$Y = \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{2}$$

sont des nombres entiers ainsi que cela résulte immédiatement des égalités (α).

Démontrons que ces valeurs satisfont aussi aux congruences (β). La première congruence s'écrira successivement

$$\begin{aligned} &x_1 x_2 + D y_1 y_2 + B(x_1 y_1 + y_2 x_1) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, 4 a_1 a_2), \\ &x_1(x_2 + B y_2) \quad + y_1(B x_2 + D y_2) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, 4 a_1 a_2), \end{aligned}$$

ou, puisque $B^2 \equiv D\,(\mathrm{mod}\, 4 a_1 a_2)$,

$$(x_1 + B y_1)(x_2 + B y_2) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, 4 a_1 a_2),$$

et cette congruence est évidente, d'après les congruences (α).

On vérifie tout aussi aisément le seconde congruence ; on aura

$$\begin{aligned} &x_1 x_2 + D y_1 y_2 - N(x_2 y_1 + y_2 x_1) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, 4 m_1 m_2), \\ &x_2(x_1 - N y_1) \quad - y_2(N x_1 - D y_1) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, 4 m_1 m_2), \end{aligned}$$

et, puisque $N^2 \equiv D\,(\mathrm{mod}\, 4 m_1 m_2)$,

$$(x_1 - N y_1)(x_2 - N y_2) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, 4 m_1 m_2)$$

qui résulte de la multiplication des dernières congruences (α). Le théorème est ainsi complètement établi.

[K13a]

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME ATTRIBUÉ A LEIBNIZ;

PAR M. A. HILAIRE.

Dans une Note insérée au numéro de décembre 1906 (p. 553) j'ai rappelé, en vue d'un problème spécial, l'existence de ce théorème. Il se présente sous deux formes différentes que j'ai citées l'une après l'autre. La deuxième seule est énoncée et démontrée partout; quant à la première, elle est rarement énoncée et je n'en connais aucune démonstration courante. Il m'a paru intéressant de lui appliquer le procédé d'élimination très symétrique et très élégant dont M. Guichard s'est servi pour l'autre (*voir* son *Traité de Géométrie*, t. II, p. 179).

Je reproduis l'énoncé de la première forme.

A, B, ..., K, L étant n points, avec les coefficients α, β, ..., $\varkappa$, λ, T le centre des distances proportionnelles pour le système et τ la somme $\alpha + \beta + \ldots + \varkappa + \lambda$,

$$\tau \sum_1^n \alpha \overline{MA}^2 = \tau^2 \overline{MT}^2 + \sum_1^n \alpha\beta \overline{AB}^2.$$

Je traite d'abord le cas de deux points.

Soit T_1 le centre des distances proportionnelles pour les deux points A et B, avec les coefficients α et β; j'applique dans le triangle MAB, pour le point T_1, l'égalité de Stewart :

$$\overline{MA}^2 . T_1B + \overline{MB}^2 . T_1A = \overline{MT_1}^2 . AB + AB . T_1A . T_1B;$$

j'y remplace T_1A et T_1B par leurs valeurs $\frac{\beta AB}{\alpha+\beta}$ et $\frac{\alpha AB}{\alpha+\beta}$:

$$(\alpha+\beta)\left(\alpha\overline{MA}^2+\beta\overline{MB}^2\right)=(\alpha+\beta)^2\overline{MT_1}^2+\alpha\beta\overline{AB}^2.$$

Je vais faire voir maintenant que, si le théorème est vrai pour $n-1$ points, il l'est encore pour n points.

A, B, ..., K étant les $n-1$ premiers points, avec les coefficients α, β, ..., $\varkappa$, T′ le centre des distances proportionnelles pour le système et τ' la somme

$$\alpha+\beta+\ldots+\varkappa$$

(de sorte que $\tau'+\lambda=\tau$), j'ai, par hypothèse,

$$(1)\qquad \tau'\sum_1^{n-1}\alpha\overline{MA}^2=\tau'^2\overline{MT'}^2+\sum_1^{n-1}\alpha\beta\overline{AB}^2;$$

T étant, par définition, le centre des distances proportionnelles pour les deux points T′ et L avec les coefficients τ' et λ, j'applique l'égalité pour le cas de deux points :

$$(\tau'+\lambda)\left(\tau'\overline{MT'}^2+\lambda\overline{ML}^2\right)=(\tau'+\lambda)^2\overline{MT}^2+\tau'\lambda\overline{T'L}^2,$$

ou, en développant,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}&\tau'^2\overline{MT'}^2+\tau'\lambda\overline{MT'}^2+(\tau'+\lambda)\lambda\overline{ML}^2\\&\quad=(\tau'+\lambda)^2\overline{MT}^2+\tau'\lambda\overline{T'L}^2;\end{aligned}\right.$$

je récris l'égalité (1), en la multipliant par $\frac{\lambda}{\tau'}$:

$$(3)\qquad \lambda\sum_1^{n-1}\alpha\overline{MA}^2=\tau'\lambda\overline{MT'}^2+\frac{\lambda}{\tau'}\sum_1^{n-1}\alpha\beta\overline{AB}^2;$$

je récris l'égalité (3), en y remplaçant le point variable

M par le point L et en la renversant :

$$(4) \qquad \tau'\lambda\,\overline{LT}^2 + \frac{\lambda}{\tau'}\sum_1^{n-1}\alpha\beta\,\overline{AB}^2 = \lambda\sum_1^{n-1}\alpha\,\overline{LA}^2;$$

j'ajoute membre à membre les égalités (1), (2), (3) et (4), et je réduis :

$$(\tau'-\lambda)\left(\sum_1^{n-1}\alpha\,\overline{MA}^2 + \lambda\,\overline{ML}^2\right)$$
$$= (\tau'-\lambda)^2\,\overline{MT}^2 + \sum_1^{n-1}\alpha\beta\,\overline{AB}^2 + \lambda\sum_1^{n-1}\alpha\,\overline{LA}^2;$$

finalement, et remplaçant $\tau'+\lambda$ par τ :

$$\tau\sum_1^{n}\alpha\,\overline{MA}^2 = \tau^2\,\overline{MT}^2 + \sum_1^{n}\alpha\beta\,\overline{AB}^2.$$

C. Q. F. D.

[K13a]

NOTE SUR L'ARTICLE PRÉCÉDENT;

PAR M. R. B.

Les deux formules signalées par M. Hilaire s'établissent simplement par l'emploi du calcul vectoriel.

1° On a

$$(1) \qquad M - A = M - T - (T - A).$$

Comme d'habitude, désignons par $U \mid V$ le produit interne des deux vecteurs U et V, et posons pour abréger

$$U \mid U = U^2.$$

On tire de la relation (1)

$$(2)\quad (M-A)^2 = (M-T)^2 + (T-A)^2 - 2(T-A)\,|\,(M-T),$$

d'où, en multipliant par α les deux membres de la relation (2), et en ajoutant membre à membre toutes les relations analogues,

$$(3)\qquad \sum \alpha(M-A)^2 = \tau(M-T)^2 + \sum \alpha(T-A)^2 - 2\sum \alpha(T-A)\,|\,(M-T).$$

Le troisième terme du second membre est nul, car on a

$$\sum \alpha(T-A) = \tau T - \sum \alpha A = 0.$$

La formule (3) exprime le premier des théorèmes rappelés par M. Hilaire.

2° On a identiquement

$$\tau(M-G) = \sum \alpha(M-A),$$

d'où l'on tire

$$(4)\quad \tau^2(M-G)^2 = \sum \alpha^2(M-A)^2 + 2\sum \alpha\beta(M-A)\,|\,(M-B),$$

la seconde somme étant étendue à toutes les combinaisons deux à deux des points A, B, ..., L. On a d'autre part

$$A-B = (M-B) - (M-A),$$

d'où

$$(A-B)^2 = (M-A)^2 + (M-B)^2 - 2(M-A)\,|\,(M-B)$$

ou

$$2(M-A)\,|\,(M-B) = (M-A)^2 + (M-B)^2 - (A-B)^2,$$

et

$$2\sum \alpha\beta(M-A)(M-B)$$
$$= \sum \alpha\beta[(M-A)^2+(M-B)^2] - \sum \alpha\beta(A-B)^2;$$

la relation (4) peut donc s'écrire

$$\tau^2(M-G)^2 = \sum \alpha^2(M-A)^2$$
$$- \sum \alpha\beta[(M-A)^2+(M-B)^2] - \sum \alpha\beta(A-B)^2.$$

Le coefficient de $(M-A)^2$ dans le second membre est

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma + \ldots + \alpha\lambda = \alpha\tau.$$

On arrive donc finalement à la formule

$$\tau^2(M-G)^2 = \tau \sum \alpha(M-A)^2 - \sum \alpha\beta(A-B)^2,$$

qui est bien celle démontrée d'une autre façon par M. Hilaire.

[K2e, K13c]

SUR LA SPHÈRE PÉDALE ET LE CERCLE PÉDAL;

PAR M. A. PELLET.

1. En transformant par polaires réciproques, relativement à une sphère (à un cercle), le fait que la sphère (le cercle) circonscrite à un tétraèdre autopolaire par rapport à une quadrique (à un triangle autopolaire par rapport à une conique) coupe orthogonalement la sphère de Monge de cette quadrique (le cercle de

Monge de cette conique), on obtient le théorème suivant :

Les sphères pédales (cercles pédaux) d'un point relativement aux tétraèdres autopolaires d'une quadrique (triangles autopolaires d'une conique) coupent orthogonalement une sphère (un cercle). (*Nouvelles Annales*, 1875, p. 68 et 69.)

Soient $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ l'équation de la quadrique rapportée à ses axes; α, β, γ les coordonnées du point. La sphère a son centre dans le plan qui passe par les pieds de ces trois coordonnées :

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}-2=0$$

et coupe orthogonalement les sphères qui passent par le point α, β, γ et le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur son plan polaire, qui a pour équations :

$$\frac{x-\alpha}{\frac{\alpha}{a^2}}=\frac{y-\beta}{\frac{\beta}{b^2}}=\frac{z-\gamma}{\frac{\gamma}{c^2}}.$$

On a donc

$$\alpha_1=\alpha\left(1-\frac{\lambda}{a^2}\right),\qquad \beta_1=\beta\left(1-\frac{\lambda}{b^2}\right),\qquad \gamma_1=\gamma\left(1-\frac{\lambda}{c_2}\right)$$

avec

$$\lambda\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-1=0,$$

et, pour l'équation de la sphère,

$$x^2+y^2+z^2-2\alpha_1 x-2\beta_1 y-2\gamma_1 z$$
$$+\frac{\alpha_1^2 a^2}{a^2-\lambda}+\frac{\beta_1^2 b^2}{b^2-\lambda}+\frac{\gamma_1^2 c^2}{c^2-\lambda}-\lambda=0.$$

Si $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 0$, auquel cas la quadrique est un hyperboloïde équilatère et λ infini, cette sphère se réduit au plan

$$\frac{2\alpha x}{a^2} + \frac{2\beta y}{b^2} + \frac{2\gamma z}{c^2}$$
$$- \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2} - 1 = 0,$$

parallèle au plan polaire du point α, β, γ et passant par le milieu de la perpendiculaire abaissée de ce point sur son plan polaire.

Remplaçant $\frac{1}{c^2}$ par 0, on a les valeurs correspondant à la conique $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. On en déduit aisément, pour le paraboloïde $\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x = 0$,

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{pq}{p+q}, \qquad \beta_1 = \frac{p\beta}{p+q}, \qquad \gamma_1 = \frac{q\gamma}{p+q};$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y - 2\gamma_1 z$$
$$+ \alpha^2 + \beta^2 \frac{p}{p+q} + \gamma^2 \frac{q}{p+q} = 0;$$

et, pour la parabole, $y^2 = 2px$,

$$\alpha_1 = \alpha + p, \qquad \beta_1 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 2(\alpha + p)x + \alpha^2 = 0 = y^2 - 2px + (x - \alpha)^2 = 0.$$

équation d'un cercle bitangent à la parabole, la corde de contact étant la parallèle à la directrice menée par le point α, β.

2. Étant donné un triangle ABC, les points inverses par rapport à ce triangle situés sur une droite sont les points de contact des hyperboles équilatères conjuguées relativement au triangle, lesquelles passent par

les centres des cercles inscrits et exinscrits, et tangentes à la droite.

Soient S un point du plan du triangle ABC, S′ son inverse, O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Le cercle pédal des points S, S′ passe par les foyers des paraboles conjuguées au triangle ayant pour directrices OS, OS′, lesquels sont situés sur le cercle des neuf points et sont séparés par un arc correspondant à un angle au centre double de $\widehat{SOS'}$, et coupe orthogonalement le cercle bitangent à la parabole, ayant pour directrice la parallèle à SS′ menée par O, conjuguée au triangle ABC, la corde de contact étant SS′. [*Voir* dans les *Nouvelles Annales* (1905, 1906) les articles de MM. Fontené et Bouvaist sur le cercle pédal et le théorème de Feuerbach.]

[K2e, K2c]

SUR LE THÉORÈME DE FEUERBACH;

PAR M. G. FONTENÉ.

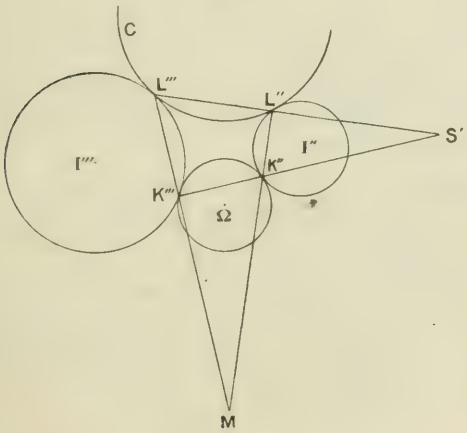
1. Dans le Volume des *Nouvelles Annales* pour 1850, M. Mention a fait observer qu'une construction donnée par Cauchy (lorsqu'il était élève à l'École Polytechnique) pour le problème du cercle tangent à deux cercles et passant par un point donné M, se simplifie singulièrement lorsque le point M appartient à l'axe radical des deux cercles : *on voit alors apparaître une tangente commune à ces deux cercles;* et il a eu l'idée très heureuse de rattacher à cette construction le théorème de Feuerbach. La démonstration aujourd'hui

classique de ce théorème par l'inversion [1] fait précisément intervenir la tangente commune dont se sert M. Mention.

Il m'a paru intéressant de reprendre cette démonstration avec les ressources de la théorie actuelle des cercles tangents à deux cercles; j'ai d'ailleurs considéré les cercles I″ et I‴ exinscrits dans les angles B et C, afin d'avoir une figure très claire, mais il va sans dire qu'un raisonnement analogue est applicable au cercle inscrit I et au cercle I′ exinscrit dans l'angle A.

2. Considérons (*fig.* 1) deux cercles I″ et I‴, un

Fig. 1.



cercle Ω qui leur est tangent, les contacts étant de même espèce, un cercle C qui leur est également tangent dans les mêmes conditions; soient K″ et K‴ les points de contact pour le cercle Ω, L″ et L‴ les points

[1] De qui est cette démonstration? Je croyais l'avoir vue dans les *Nouvelles Annales*, mais je n'ai pas pu la retrouver.

de contact pour le cercle C. D'une part, le point d'intersection S′ des droites K″K‴ et L″L‴ est le centre de similitude directe des cercles I″ et I‴, et la puissance de ce point relativement à chacun des deux cercles Ω et C est égale à la puissance d'inversion des cercles I″ et I‴, de sorte que le point S′ appartient à l'axe radical des cercles Ω et C. D'autre part, et d'une manière analogue, le point d'intersection M des droites K″L″ et K‴L‴ est un centre de similitude (directe dans le cas de la figure) pour les cercles Ω et C, et ce point appartient à l'axe radical des cercles I″ et I‴.

Si l'on substitue au cercle C une tangente commune extérieure relative aux cercles I″ et I‴, le point M, toujours situé sur l'axe radical de ces deux cercles, se trouve sur le cercle Ω puisqu'il est pôle d'inversion de ce cercle et de la tangente commune, et la tangente en ce point est parallèle à la tangente commune L″L‴. On arrive à ce théorème :

Théorème. — *Les cercles tangents à deux cercles* I″ *et* I‴, *les contacts étant de même espèce, peuvent être caractérisés comme il suit :*

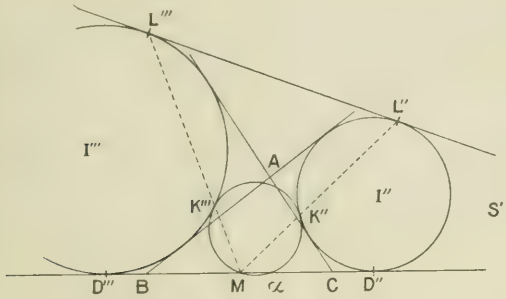
1° *La puissance du point* S′, *centre de similitude directe des cercles* I″ *et* I‴, *par rapport aux cercles considérés, est égale à la puissance d'inversion des deux cercles* I″ *et* I‴ ;

2° *Aux deux points d'intersection de l'un des cercles considérés avec l'axe radical des cercles* I″ *et* I‴, *les tangentes sont parallèles aux tangentes communes extérieures relatives à ces deux cercles* (condition simple).

3. Corollaire. — *Le cercle des neuf points d'un triangle* ABC *est tangent au cercle inscrit et aux trois cercles exinscrits.*

Ce cercle peut, en effet, être caractérisé comme il suit (*fig.* 2) :

Fig. 2.



1° Il passe au milieu M du côté BC, point qui appartient à l'axe radical des deux cercles exinscrits I'' et I''', et la tangente en ce point est antiparallèle à BC par rapport à l'angle A, ou parallèle à la seconde tangente commune extérieure L''L''' relative à ces deux cercles;

2° Ce cercle passe au pied de la hauteur Aα, et, si l'on désigne par S' le pied de la bissectrice de l'angle extérieur en A (centre de similitude directe des cercles I'' et I'''), par D'' et D''' les points de contact des cercles I'' et I''' avec le côté BC, le point α est le conjugué harmonique du point S' par rapport aux points D'' et D'''; cette division harmonique peut être traduite par la relation

$$\overline{S'M} \times \overline{S'\alpha} = \overline{S'D''} \times \overline{S'D'''},$$

qui exprime que la puissance du point S' par rapport au cercle des neuf points est égale à la puissance d'inversion des deux cercles I'' et I'''.

Le cercle des neuf points est donc tangent aux cercles exinscrits dans les angles B et C.

Les points de contact K″ et K‴ sont situés sur les droites ML″ et ML‴.

4. L'axe radical des deux cercles I″ et I‴ est la bissectrice de l'angle en M du triangle MNP, en appelant M, N, P les milieux des côtés du triangle ABC. Le second point de rencontre de cet axe radical avec le cercle des neuf points est le milieu X′ de l'arc supérieur Mα, et la tangente en ce point est parallèle à la tangente commune extérieure BC. Les points de contact K″ et K‴ sont situés sur les droites X′D″ et X′D‴.

5. Si, revenant au cas général, on envisage la figure formée par le cercle Ω, le cercle C ou la tangente commune L″L‴, le cercle I″ qui touche le cercle Ω au point K″ et le cercle C ou la tangente commune au point L″, le cercle I‴ qui les touche aux points K‴ et L‴, on voit que cette figure est sa propre inverse relativement au point M.

En ce qui concerne le théorème de Feuerbach, la démonstration classique de ce théorème par l'inversion résulte immédiatement de la détermination donnée plus haut pour le cercle des neuf points : il faut seulement traduire la division harmonique par la relation

$$\overline{MD''}^2 = \overline{MD'''}^2 = MS' \times M\alpha.$$

(Le point X′ est de même un pôle d'inversion pour le cercle Ω et la droite BC, la puissance d'inversion étant la puissance de ce point par rapport au cercle I″ ou au cercle I‴ ; il suit de là que les longueurs égales X′M et X′α sont égales à la longueur de la tangente menée de X′ au cercle I″ ou au cercle I‴. Cette propriété a été indiquée par M. Mannheim, dans le cas du

point X milieu de l'arc inférieur $M\alpha$ et des cercles I et I'.)

6. Les six axes radicaux des cercles I, I', I'', I''' considérés deux à deux sont les six bissectrices relatives au triangle MNP, de sorte que les centres radicaux de ces cercles considérés trois à trois sont les centres des cercles tangents aux trois côtés de ce même triangle; ces quatre points forment un quadrangle orthogonal dont le cercle des neuf points est le cercle MNP, les milieux des six côtés du quadrangle étant d'ailleurs les points X et X', Y et Y', Z et Z'.

[R7b]

SUR LES FORCES CENTRALES MULTIFORMES;

Par M. Georges REMOUNDOS.

1. D'après une formule classique, l'intensité d'une force centrale est donnée par l'expression suivante :

$$F = -m\frac{c^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right], \tag{1}$$

où r et θ désignent les coordonnées polaires, le centre de la force étant pris comme pôle, m désigne la masse du mobile et c la constante des aires.

Cette formule nous montre que la force F s'exprime rationnellement par le rayon polaire r et ses dérivées (première et seconde) par rapport à l'angle polaire θ; c'est là un fait qui entraîne des conséquences intéressantes concernant la position des trajectoires dans le cas où la force F est donnée par une fonction multi-

forme de la position du mobile, que je me propose de faire connaître dans cette Note.

2. Donnons-nous des conditions initiales déterminées et considérons la trajectoire correspondante T. Il est facile de voir que sur cette trajectoire le rayon polaire r et les dérivées $\frac{dr}{d\theta}$ et $\frac{d^2 r}{d\theta^2}$ ne dépendent que de la position du mobile sur la trajectoire, pourvu que cette position ne soit pas un point multiple de la courbe. Nous avons, en effet, les formules

$$(2) \qquad \frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\operatorname{tang}\varphi}, \qquad \rho = \frac{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2 r}{d\theta}},$$

φ désignant l'angle de la tangente de la trajectoire avec le rayon polaire et ρ le rayon de courbure de la trajectoire; ces formules montrent bien notre lemme, parce qu'il n'y figure que des fonctions trigonométriques de l'angle φ. On s'en rend mieux compte par une facile élimination entre les formules (1), (2) et celle qui donne la vitesse V du mobile sollicité par la force centrale en coordonnées polaires; cette élimination nous conduit à l'expression suivante de l'intensité de la force centrale [1] :

$$(3) \qquad F = -\frac{m}{c}\frac{rV^3}{\rho},$$

qui prend aussi la forme suivante :

$$(4) \qquad F = mc^2\frac{r}{\rho P^3},$$

---

[1] *Voir* une Note de Resal (*Comptes rendus*, t. XC, p. 769) contenant un théorème relatif à cette formule (3).

si nous tenons compte de la formule classique

$$PV = c,$$

où P désigne la distance du pôle (centre de force) à la tangente de la trajectoire. Cette formule nous montre d'une façon immédiate le fait que l'intensité ne dépend sur une trajectoire fixe que de la position du mobile, pourvu que cette position ne soit pas un point multiple de la courbe de la trajectoire.

L'exclusion des points multiples est bien naturelle, parce qu'en ces points les quantités géométriques ρ et P pourraient bien avoir plusieurs valeurs.

3. Le lemme ci-dessus indiqué, si simple et si facile à rendre visible, est susceptible d'applications importantes, dans le cas où la force F est donnée par une fonction multiforme de la position du mobile, concernant l'allure et la position de la trajectoire. Supposons, par exemple, que la force F soit donnée par la fonction suivante :

$$F = f(r, \theta),$$

admettant un point critique (r_0, θ_0) et un seul. Nous avons, alors, le fait intéressant suivant : *Aucune trajectoire du mobile ne saurait renfermer le point* (r_0, θ_0).

Nous nous bornerons à citer les applications suivantes, qui découlent immédiatement de la proposition ci-dessus conclue :

Si la fonction $f(r, \theta)$ *n'est pas périodique par rapport à* θ *avec une période égale à* 2π, *aucune trajectoire fermée ne saurait entourer le pôle (centre de la force)*. En effet, dans le cas contraire, la force ne dépendrait pas seulement de la position du mobile sur chaque trajectoire, puisque à chaque position

$$(r, \theta + 2K\pi)$$

la force aurait plusieurs valeurs données par la formule

$$f(r, \theta + 2K\pi),$$

et correspondant aux diverses valeurs de l'entier K; la force prendrait ces valeurs dans les divers passages du mobile par une certaine position de la trajectoire. Supposons aussi que la force F soit donnée par une fonction $\varphi(x, y)$ harmonique par rapport aux coordonnées x et y et désignons par $\sigma(z) + C$ l'ensemble des fonctions analytiques formées par la combinaison de la fonction $\varphi(x, y)$ avec ses conjuguées. Si la fonction $\varphi(x, y)$ admet des points singuliers qui soient des points critiques des fonctions analytiques $\sigma(z) + c$, aucune trajectoire ne saurait entourer un point (un seul) critique commun des fonctions $\sigma(z)$ et $\varphi(x, y)$, parce que la permutation des déterminations de la fonction analytique $\sigma(z) + c$ entraînerait celle des déterminations de la fonction $\varphi(x, y)$, c'est-à-dire de la force F.

Je ne me suis servi de la fonction $\sigma(z)$ que pour donner une expression plus claire du résultat. Nous pourrions bien dire aussi qu'aucune trajectoire ne saurait renfermer un point critique unique de la fonction $\varphi(x, y)$, en entendant par *point critique* un point autour duquel la fonction $\varphi(x, y)$ change de détermination.

En général, la connaissance des singularités de la fonction donnant la force centrale nous permet de conclure l'impossibilité de quelques courbes comme trajectoire, quelles que soient les conditions initiales.

[P1a]

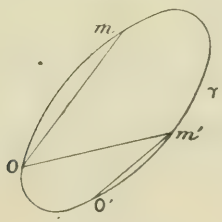
DIVISIONS HOMOGRAPHIQUES SUR UNE CONIQUE;

PAR M. A. LAUREAUX.

Cette question faisant partie de certains programmes, il m'a semblé utile de démontrer élémentairement, c'est-à-dire en introduisant le moins possible les imaginaires, le théorème fondamental : *la droite joignant les points homologues enveloppe une conique.*

On sait que deux points m, m' décrivent sur une conique γ des divisions homographiques si en les joignant

Fig. 1.



à un point fixe O les faisceaux Om, Om' sont homographiques.

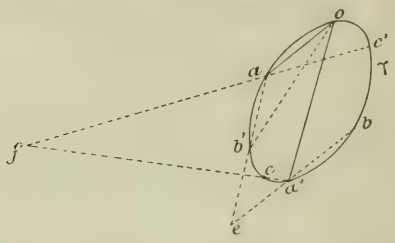
Il en résulte que, si l'on remplace O par O', la propriété subsiste. De même Om, $O'm'$ sont homographiques.

Je dis que mm' enveloppe une conique bitangente à γ.

Construisons les rayons doubles. Pour cela, nous considérons trois couples de rayons homologues (*fig.* 2) : $oa\,oa'$, $ob\,ob'$, $oc\,oc'$; ab' coupe $a'b$ en e, ac' coupe $a'c$ en f, ef coupe γ aux points doubles cherchés (construction classique).

1° *ef* ne coupe pas γ. Projetons en prenant un centre S sur un plan parallèle au plan S*ef*. Nous

Fig. 2.



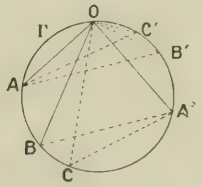
obtenons une conique γ' ne coupant pas la droite de l'infini, c'est-à-dire une ellipse que nous projetons *cylindriquement* suivant un cercle Γ.

Soient (*fig.* 3) A, B, C, A′, B′, C′ les points qui correspondent à a, b, c, a', b', c'; A B′, A′ B, A C′, A′ C sont parallèles, d'où

$$\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} = \widehat{COC'}.$$

L'homographie est déterminée par un angle constant

Fig. 3.



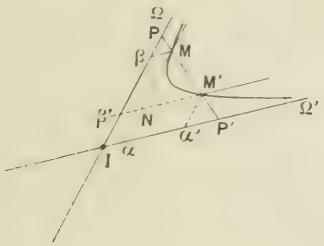
de sommet O; les droites AA′, BB′ . . . enveloppent un cercle concentrique.

2° *ef* coupe γ en $\omega\omega'$. Projetons encore *ef* à l'infini, nous obtenons une hyperbole d'asymptotes IΩ, IΩ'. A deux points homologues m, m' correspondent M, M′; MM′ coupe les asymptotes en P, P′.

Menons les parallèles aux asymptotes par MM′.

M′β′ et Mα sont homographiques et se coupent en N qui décrit une hyperbole ayant les mêmes asymptotes,

Fig. 4.



d'où

$$\overline{I\alpha}.\overline{I\beta} = K, \qquad \overline{I\alpha}.\overline{I\beta} = \overline{I\alpha'}.\overline{I\beta'} = K'.$$

Les triangles βPM et α′M′P′ sont égaux, d'où

$$IP = I\beta + \alpha'M' = I\beta + I\beta'. \qquad IP' = I\alpha' - I\alpha$$

$$IP.IP' = (I\beta + I\beta')(I\alpha + I\alpha') = 2K' + K + \frac{K'^2}{K} = \text{const.}$$

P, P′ décrivent deux divisions homographiques et PP′ enveloppe une conique tangente à IΩ et IΩ′, visiblement à l'infini.

VARIÉTÉS.

ASSOCIATION SCIENTIFIQUE INTERNATIONALE ESPÉRANTISTE.

Les hommes de Science ont été les premiers à comprendre l'utilité d'une langue auxiliaire internationale, et ils ont été les premiers à propager en tous pays l'Esperanto, qui fatalement devait les séduire par sa logique et sa précision.

Ceux, peu nombreux, qui pourraient encore douter des merveilleuses qualités de cette langue seconde n'auront qu'à lire, pour se convaincre, la belle traduction de l'ouvrage de M. E.-V. Huntington, *La Kontinuo,* dont nous rendons compte par ailleurs.

Il y a trois ans déjà (janvier 1904) apparaissait la première Revue scientifique mensuelle rédigée entièrement en Esperanto, *Internacia Scienca Revuo,* honorée d'un patronage qui comprenait des savants éminents de tous pays.

Depuis, l'Esperanto a fait des progrès considérables, particulièrement en Grande-Bretagne, en Allemagne et aux États-Unis, progrès qui, dans ces deux derniers pays, sont dus en grande partie à l'active propagande de l'éminent physicien, le professeur W. Ostwald.

Pendant le second Congrès espérantiste, qui eut lieu à Genève en août 1906 et qui eut le succès que l'on sait, quelques amis des Sciences venus à ce Congrès se réunirent le 31 août pour jeter les bases d'une association Scientifique internationale Espérantiste, *Internacia Scienca Asocio Esperantista,* destinée à rapprocher tous les hommes de Science amis de l'Esperanto.

L'Assemblée, présidée par M. le Général H. Sebert, membre de l'Institut, se contenta d'émettre un vote de principe et d'accepter à l'unanimité la déclaration suivante, présentée par M. Carlo Bourlet :

Texte original.

La subskribintoj, scienculoj, scienciстoj aŭ sciencamantoj, opiniante, ke la enkonduko de la konstanta uzado de la lingvo internacia Esperanto en la Sciencon multege utilus por faciligi la interrilatojn de Scienculoj diversnaciaj kaj ankaŭ la legadon de la sciencaj gazetoj, esprimas la deziron, ke :

1e La scienculoj konstante uzu la lingvon Esperanto dum siaj kongresoj.

2e La gravaj internacie disvastigitaj sciencaj gazetoj akceptu artikolojn redaktitajn en Esperanto kaj plie aldonu al ĉiu artikolo redaktita en nacia lingvo resumon en Esperanto montrantan ĝian enhavon.

La subskribintoj promesas helpi, ĉiu laŭ siaj fortoj, al la efektivigo de tiuj deziroj.

Ili permesas al ĉiu ajn publikigi tiun de ili subskribitan decidon.

Traduction.

Les soussignés, savants, hommes de Science ou amis des Sciences, étant d'avis que l'introduction de l'usage constant de la langue internationale Esperanto dans la Science serait extrêmement utile pour faciliter les relations entre savants de diverses nations ainsi que la lecture des journaux scientifiques, expriment le vœu :

1° Que les savants fassent un usage constant de la langue Esperanto pendant leurs Congrès.

2° Que les journaux scientifiques importants, répandus en tous pays, acceptent des articles rédigés en Esperanto et de plus fassent suivre tout article rédigé en une langue nationale d'un résumé en Esperanto faisant connaître son contenu.

Les soussignés promettent d'aider, chacun selon ses forces, à la réalisation de ces vœux.

Ils permettent à n'importe qui de publier cette déclaration avec leur signature.

L'Association Scientifique internationale espéran-

tiste se compose provisoirement des personnes, des Sociétés et des journaux scientifiques qui adhérent à la précédente déclaration.

Cette adhésion purement morale est *absolument gratuite*, aucune cotisation n'étant exigée des adhérents.

Ils seront convoqués à une Assemblée générale qui se tiendra probablement à Cambridge, du 10 au 17 août 1907. Cette Assemblée pourra arrêter, s'il y a lieu, les statuts de l'Association et nommer un bureau définitif.

En attendant, M. René de Saussure, privat-docent à l'Université de Genève, a, avec le concours d'une vingtaine de professeurs de cette Université, fondé un Bureau scientifique Espérantiste international, *Internacia Esperantista Scienca Oficejo*, qui, d'accord avec le bureau provisoire de l'Association, se charge de recueillir les adhésions et de les publier dans l'*Internacia Scienca Revuo* dont il a pris la rédaction en mains.

Nous prions instamment tous ceux des lecteurs des *Nouvelles Annales de Mathématiques* qui s'intéressent à l'Esperanto et qui approuvent la déclaration ci-dessus, de vouloir bien remplir et signer le bulletin d'adhésion encarté dans le présent numéro et de l'adresser à l'*Internacia Scienca Oficejo*, 8, rue Bovy-Lysberg, à Genève (Suisse).

Le Secrétaire provisoire
de la Internacia Scienca Asocio Esperantista,
CARLO BOURLET.

Nota. — Nos lecteurs, connaissant depuis longtemps les sentiments favorables à l'Esperanto des trois Rédacteurs et de l'Éditeur des *Nouvelles Annales*, ne seront

pas étonnés d'apprendre que les *Nouvelles Annales* ont adhéré à l'Association. D'ailleurs, depuis trois ans déjà, nous avons décidé d'accepter les articles rédigés en Esperanto. C. B.

CORRESPONDANCE.

M. M. d'Ocagne. — L'énoncé de la question 2064 a subi une altération manifeste. Il faut, dans les deux dernières lignes, permuter « par » et « sur » et lire : « ... égal au segment intercepté sur le rayon OC par la normale en M ».

La proposition ainsi rectifiée est d'ailleurs à peu près évidente. Si, en effet, N est le point où la normale en M rencontre OC, m le centre de courbure répondant au point M, θ l'angle que fait MC avec un axe fixe quelconque du plan, on a, pour les différentielles des arcs décrits simultanément par les points M et C,

$$d(\mathrm{M}) = \mathrm{M}m.d\theta, \qquad d(\mathrm{C}) = \mathrm{CN}.d\theta,$$

d'où, par suite de l'égalité des vitesses,

$$\mathrm{M}m = \mathrm{CN}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Le résultat est presque aussi simple, ainsi que je l'ai fait remarquer jadis (*Bull. de la Soc. math.*, t. XI, 1883, p. 134), lorsqu'on suppose quelconques et la courbe que décrit le point C et le rapport des vitesses. Il s'énonce alors ainsi :

Les perpendiculaires menées par chacun des points M *et* C *sur la vitesse de l'autre et la perpendiculaire menée du centre de courbure m sur la résultante de ces deux vitesses passent par un même point.*

BIBLIOGRAPHIE.

La Kontinuo, *elementa teorio starigita sur la ideo de ordo, kun aldono pri transfinitaj nombroj* (1), de *Edward V. Huntington*, el la angla lingvo tradukita de *Raoul Bricard*. — 1 vol. in-8, 125-paĝa. Paris, Gauthier-Villars, 1907. Prezo : 2fr,75.

S° Edward V. Huntington estas bonega matematikisto kaj lerta profesoro, kiu scias ordigi malfacilan temon kaj klarigi plej abstraktajn tezojn. Lia bela verko *la Kontinuo* estas vere majstra verko, kaj pro tio ĝi nepre meritis esti tradukita en nian helpan lingvon internacian, por tiamaniere rapide diskoniĝi.

Kiel diris S° Bricard en sia antaŭparolo, « tiu volumo prezentas sub formo, kiu ŝajnas definitiva, la rezultatojn de gravaj esploroj de la plej eminentaj matematikistoj, kaj pro perfekta rigoreco, pro lerta kaj konciza redaktado ĝi estas inda fariĝi klasika. »

Kiam, antaŭ preskaŭ kvarona jarcento, Georgo Cantor publikigis siajn unuajn artikolojn pri la de li nove fondita teorio de la klasoj (*Menge, ensemble, class*), oni povis kredi, ke tiu verko estas nur iu filozofia matematikaĵo, kiu pli helpos la filozofojn ol la matematikistojn. Kun granda miro la scienculoj iom post iom konstatis, ke tiu ŝajne metafizika elpensitaĵo entenis kernon de fruktodona vero kaj ĝermon de plej fundamentaj studoj. Nuntempe la Cantor'a teorio, almenaŭ ĝia elementa parto, enmiksiĝas en la tutan Analitikon, kaj ne estas eble esplori iun el la profundaĵoj de la teorio de l'funkcioj sen helpo de tiu gvidilo kaj lumilo.

Sed la Cantor'aj originalaj artikoloj estas malfacile legeblaj, la diversaj aliaj laboroj estas disaj en la multaj matematikaj gazetoj, kaj kompreneble la vidpunktoj de la malsamaj aŭtoroj

(1) Cet ouvrage étant rédigé en langue esperanto, il nous semble tout naturel d'en faire le compte rendu dans la même langue.

diferencas. S° E.-V. Huntington plenumis do la nefacilan taskon verki unuforman pedagogian redakton de tiu malsimpla temo, por faciligi la ellernon de la fundamenta elementa parto de la teorio de l'unuoble ordigitaj klasoj aŭ *serioj*.

Tri ĉefaj tipoj povas esti distingitaj en la serioj :

1° La *disaj* serioj, en kiuj ĉiu elemento (krom la unua aŭ lasta) havas tujan sekvanton kaj tujan antaŭanton, kaj kiuj plie verigas la Dedekind'an postulaton.

Ili liveras la unuan tipon de komputeblaj serioj, kies ĉeftipo estas la serio ω de l'naturaj entjeroj.

2° La *densaj* serioj komputeblaj, en kiuj neniu elemento havas tujan sekvanton aŭ tujan antaŭanton, tiel ke oni povas diri, ke ĉiu elemento havas infinite multajn najbarojn.

Tiuj serioj ne verigas la Dedekind'an postulaton.

3° La *liniaj kontinuaj* serioj, kiuj estas densaj kaj plie verigas la Dedekind'an postulaton.

Ĉiu speco de serio estas do klare difinita per kelkaj postulatoj kaj la aŭtoro zorge pruvas ĉiufoje, ke la proponitaj difinantaj postulatoj estas inter si sendependaj.

Grave estas rimarki, ke la postulatoj elektitaj de S° Huntington por la difino de l'kontinua serio ne estas tiuj, kiujn proponis mem Cantor; kaj ni opinias, ke li estas prava, ĉar la Dedekinda postulato estas pli simetria kaj ankaŭ pli konforma je la nun ĉie akceptita difino de l'neracionaloj. La aŭtoro tiel enmetis grandan regulecon kaj unuformecon en sian redakton, kiu prezentiĝas kiel eleganta triŝtupa suprenirejo, en kiu ĉiu ŝtupo subtenas la sekvantan.

En aldono la verkinto resume klarigis la ĉefajn ideojn de Cantor pri transfinitaj nombroj. Li prave montras la senprecizecon kaj sencertecon de tiu nune nur filozofia klasifiko, pri kiu la matematikistoj senfine, kaj ankaŭ iom sencele, diskutadas.

Ĉu la diversaj *Alefoj* estas duope malekvivalentaj, ĉu la kardinala nombro de la kontinuo estas la dua Alef? k. t. p. Jen demandoj kuriozaj, sed pri kies solvoj sin interesos nur la filozofoj. Tiel longe, kiam tiuj demandoj restos en la pure idea kampo, tiel longe, kiam oni ne reale renkontos tipojn de tiaj transfinitaj klasoj, la solvo estos tre duba, kaj verŝajne la diskutado konservos tiun metafizikan formon, kiun la matematiktistoj devas zorge eviti.

Eble iam renkontiĝos efektivaj ekzemploj, eble iam troviĝos

analitikaj demandoj, kiuj alportos al ni materialon; tiam per unu sola bato la tuta afero estos klarigita. Ĝis tiam ni sekvu la saĝan ekzemplon de S° Huntington, kaj pacience ni atendu.

Mi esperas, ke tiuj mallongaj notetoj instigos miajn legantojn al legado de tiu bonega instruiga laŭdinda verko. Cetere ili trovos plezuron ne nur en la matematika parto, sed ankaŭ en la Esperanta traduko. Efektive S° Bricard, kiu estas la aŭtoro de tiu bona matematika terminaro, kiu ebligis la unuforman skribon de matematikaj verkoj en Esperanto, plej lerte faris tiun tradukon. Lia traduko estas la unua grava tiaspeca volumo; li montris al ni irindan vojon, kaj ni esperas, ke multaj nun sekvos lian ekzemplon. Al S° Huntington, kiu nun diskonigas Esperanton en Ameriko, al S° R. Bricard, kiu tiel kuraĝe eniris la vojon de praktika scienca uzado de la helpa lingvo, al nia bonega eldonisto S° Gauthier-Villars, kiu sentime helpas nian entreprenon, la tuta Esperantistaro kaj la tuta homaro ŝuldas grandan dankon. La batalo kontraŭ la malprudentaj antaŭjuĝoj, la malsaĝa rutino kaj neŝancelebla inerteco de l'homaro nun komenciĝis, kaj, se ni havos multajn tiajn fervorajn kunmilitantojn, neniu povos eĉ dubeti pri la fina sukceso de nia sciencama penado. C. B.

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Besançon.

Épreuve théorique. — *On considère tous les cercles* C *passant par deux points fixes placés sur* Oz *symétriquement par rapport à* O. *Leurs équations générales sont*

$$y - \alpha x = 0,$$
$$x^2 + y^2 - z^2 - 2\beta x - a^2 = 0,$$

α *et* β *étant deux paramètres arbitraires.*

Supposant $\beta = f(\alpha)$:

1° *Démontrer que les cercles* C *de la famille ainsi déterminée sont les caractéristiques (au sens de la théorie des enveloppes) d'une famille de sphères* S. *Équation générale de ces sphères* S. *Il y a exception pour certaines fonc-*

tions f. Expression générale de ces fonctions f exceptionnelles.

2° *Supposant que f ne soit pas une de ces fonctions exceptionnelles, déterminer les lignes de courbure de la surface engendrée par la famille de cercles* C.

3° *Déterminer f de façon que le lieu des centres des sphères* S *soit la courbe* $x = F(y)$ *du plan des* xy. *Appliquer au cas particulier* $x = y^2$.

SOLUTION.

1° Les sphères sont

$$x^2 - y^2 + z^2 - 2(\beta - \alpha\beta')x - 2\beta' y - a^2 = 0,$$

$$\beta' = \frac{df(\alpha)}{d\alpha}.$$

Il y a exception quand β est linéaire en α.

2° Les lignes de courbure sont les cercles et leurs trajectoires orthogonales.

3° On est conduit à l'équation de Clairaut :

$$\beta - \alpha\frac{d\beta}{d\alpha} = F\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right),$$

dont il faut prendre la solution singulière qui est, dans le cas particulier,

$$\beta = -\frac{\alpha^2}{4}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Oxy étant deux axes rectangulaires et* Δ *la droite ayant pour équation* $x = 1$, *on considère toutes les paraboles* P *tangentes en* O *à* Ox *et ayant* Oy *pour axe. Chaque parabole* P *rencontre* Δ *en un point* M.

Déterminer les paraboles P *pour lesquelles l'intégrale curviligne*

$$\int \left[\frac{y(x-2)^2(x^2+2x-2)+x^2(x+1)^2}{x^4-2x^3-3x^2+4x+4}\,\frac{y}{x} - 6\log y\right]dx$$
$$-\frac{6x^4-24x^3+24x^2+1}{2x(x-2)^2}\,dy$$

étendue à l'arc OM *de la parabole* P *est maxima ou minima.* (Juin 1906.)

Lyon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I (Fonctions elliptiques).

1° *Soient :*

$\mathrm{p}u$ *la fonction de Weierstrass;*

2ω *et* $2\omega'$ *les deux périodes, telles que* 2ω *et* $\frac{2\omega'}{i}$ *soient des quantités positives;*

u *un argument réel et positif;*

$e_1 = \mathrm{p}\omega,\ e_3 = \mathrm{p}\omega',\ e_2 = \mathrm{p}(\omega + \omega'),\ e_1 = 1 + e_3;$

$\frac{1}{\mathrm{sn}\, u}$ = *la racine carrée arithmétique de* $\mathrm{p}u - e_3$.

Exprimer e_1, e_2, e_3 *à l'aide du module* k *relatif à* $\mathrm{sn}\, u$; *exprimer* $\sqrt{\mathrm{p}u - e_1}$ *et* $\sqrt{\mathrm{p}u - e_2}$ *en fonction de* $\mathrm{sn}\, u$, $\mathrm{cn}\, u$, $\mathrm{dn}\, u$.

2° *Soit la courbe* C *définie par les équations (coordonnées rectangulaires)*

$$\left.\begin{aligned} 2x &= \mathrm{p}(u + a) + \mathrm{p}(u - a) \\ 2y &= \mathrm{p}(u + a) - \mathrm{p}(u - a) \end{aligned}\right\}\ a = \text{réel}.$$

Quel est le degré de C? *à quelle condition les quatre points* u_1, u_2, u_3, u_4 *de* C *sont-ils sur une même circonférence de cercle ?*

Nommons :

M *un point de* C;

E_1, E_2, E_3 *les trois points*

$x = e_1,\quad y = 0;\qquad x = e_2,\quad y = 0;\qquad x = e_3,\quad y = 0;$

r_1, r_2, r_3 *les trois distances* ME_1, ME_2, ME_3.

Exprimer r_1, r_2, r_3 *à l'aide de* $\mathrm{sn}\, u$, $\mathrm{cn}\, u$, $\mathrm{dn}\, u$, *et montrer que* r_1 *et* r_3 *sont liées par une relation linéaire.*

II. *Calculer l'aire convexe de l'ellipsoïde de révolution*

$$x^2 + y^2 + 4z^2 = 1.$$

III. *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$pq = x + y,\qquad p = \frac{\partial z}{\partial x},\qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Donner une méthode pour obtenir celles des surfaces intégrales qui passent par l'origine des coordonnées.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Soit, en coordonnées rectangulaires, la surface* S :

$$x = \sqrt{u^2 + \frac{1}{2}} \cos v,$$

$$y = \sqrt{u^2 + \frac{1}{2}} \sin v,$$

$$z = u.$$

1° *Construire les courbes* C, $v = f(u)$, *telles que la tangente fasse avec l'axe des* z *un angle constant* α,

$$\operatorname{tang} \alpha = \sqrt{2}.$$

2° *Par un point* M *de* S *passent deux courbes* C. *Calculer les cosinus directeurs des deux normales principales et leurs angles avec la surface.*

3° *Calculer les rayons de courbure et de torsion pour la courbe* C.

SOLUTION.

Les problèmes I, II, III sont des applications immédiates du cours. Passons à l'épreuve pratique.

L'équation des courbes C est

$$\text{const.} + v = \int \frac{\sqrt{1 + u^2}}{u^2 + \frac{1}{2}} du.$$

On est ramené à une quadrature très simple en posant $1 + u^2 = (u + w)^2$, puis $w^2 = t$. La surface S est un hyperboloïde de révolution autour de l'axe des z et à une nappe.

(Juillet 1906.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Calculer l'intégrale* ($z = x + iy$)

$$\int \frac{z^3 e^{\frac{1}{z}} dz}{z + 1},$$

prise le long d'une circonférence de rayon 2, *avec le centre*

à l'origine et dans le sens direct. Résidu de la fonction sous le signe $\int$ *pour* $z = \infty$.

II. *Calculer, par la théorie des résidus, l'intégrale* (x *réel*)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4},$$

et en déduire la valeur de $\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos x}{2(1 + \cos^2 x)} dx$.

III. *Soient :*

z *une variable complexe;*
$\lambda(z)$ *une fonction rationnelle;*
$\mu(z) = \int_{z_0}^{z} \lambda(z)\, dz$; $u(z) = \int_{z_0}^{z} e^{\mu(z)} dz$;
$z = a$ *un pôle de* $\lambda(z)$.

1° *Quand* a *est-il, pour* $u(z)$, *un point ordinaire, un pôle, un point singulier logarithmique (mais non un point singulier essentiel)?*

2° *Quand* $z = \infty$ *est-il, pour* $u(z)$, *un point ordinaire?*

II. 1° *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$\left(p_j = \frac{\partial z}{\partial x_j};\ j = 1, 2, 3, 4\right)$$

$$0 = p_1(x_1 + x_2) + p_2(x_3 + x_3) + p_3(x_3 + x_4) + p_4 x_4.$$

2° *La circonférence (coordonnées rectangulaires)*

$$y = 0, \qquad z^2 + (x - 1)^2 = 4$$

tourne autour de l'axe des z *et engendre un tore. Calculer l'aire convexe et le volume du tore.*

Épreuve pratique. — *Soient (coordonnées rectangulaires)* u *et* v *deux paramètres, et* a *une longueur fixe donnée;*

S *la surface*

$$x = u \cos v, \qquad y = u \sin v, \qquad z = av$$

1° *Trouver les lignes asymptotiques de* S.

2° *Calculer, pour la courbe* $u = av$ *de* S, *la courbure, la torsion, le trièdre de Serret, en un point.*

(Novembre 1906.)

Nancy.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Condition nécessaire et suffisante pour que deux fonctions de deux variables indépendantes soient liées par une relation.*

II. *Étant donnée l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2 y - 2x}{1 - x^3}:$$

1° *Déterminer une solution particulière de la forme* $y = ax^2$;

2° *Intégrer l'équation;*

3° *Trouver les solutions particulières de la forme*

$$y = ax + b,$$

et retrouver en partant de là la solution générale.

III. *On considère les droites* D *représentées par les équations*

$$x = tz + p, \qquad y = pz + \frac{t^3}{3};$$

1° *t et p étant indépendants, combien de droites* D *réelles passent par un point de l'espace?*

2° *Comment doit-on choisir p en fonction de t pour que les droites* D *ainsi déterminées aient une enveloppe? Trouver pour une solution quelconque l'arête de rebroussement et la trace sur le plan* xOy *de la surface formée par ces droites. Lieu des arêtes de rebroussement.*

SOLUTIONS.

I. L'équation est une équation de Riccati; elle a la solution particulière $y = -x^2$, et sa solution générale est $y = \frac{1 - cx^2}{c - x}$;

les solutions du premier degré sont $y = \omega x + \omega^2$, ω étant une racine cubique de l'unité. La propriété du rapport anharmonique de quatre solutions de l'équation fournit la solution générale.

II. Par un point (x, y, z) passent trois droites qui sont toutes trois réelles si y est extérieur aux ordonnées des deux surfaces (F)

$$3(xz - y) \pm 2z^3 = 0.$$

Pour que les droites aient une enveloppe, il faut prendre p égal à $\frac{\varepsilon t^2}{2} + c$, ε étant ± 1; la trace de la surface est la courbe $y^2 = \frac{8}{9}(x - c)^3$; son arête de rebroussement est la cubique

$$z = -\varepsilon t, \qquad x = \frac{-\varepsilon t^2}{2} + c, \qquad y = -c\varepsilon t - \frac{t^3}{6};$$

le lieu de ces arêtes est la surface focale dont les deux nappes ont les équations (F). (Juillet 1906.)

Épreuve théorique. — I. *On considère l'équation aux dérivées partielles*

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x + y;$$

déterminer la solution z de cette équation qui se réduit pour $x = 1$ à une fonction donnée $f(y)$ de y. La solution dépend de la fonction $f(u)$, où u désigne le rapport $\frac{y}{x}$; comment faut-il choisir la fonction $f(u)$ pour que z satisfasse à l'équation proposée et à l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{y}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \log x\right)^2 ?$$

II. *Centre et rayon de courbure d'une courbe gauche. On donne la courbe représentée par les équations*

$$x = a\sin^2 t, \qquad y = a\sin t\cos t, \qquad z = a\cos t,$$

où a est un nombre fixe et t un paramètre variable; le

plan normal passe constamment par l'origine; déterminer et construire le lieu des parallèles menées par l'origine aux tangentes à la courbe. (Octobre 1906.)

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Besançon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Potentiel de volume. Propriétés caractéristiques.*

II. *Discussion du roulement de deux roues avec bielle sur un plan incliné.* (Juin 1906.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Définition des lignes de tourbillon dans un milieu continu en mouvement. Leurs propriétés lorsqu'il existe une fonction des accélérations.*

II. *Un solide mobile autour d'un axe est soumis : 1° à une force dont le moment est proportionnel à l'écart angulaire u qui existe entre la position actuelle du corps et sa position d'équilibre et de sens contraire au sens de cet écart; 2° à une résistance dont le moment est proportionnel à la vitesse angulaire; 3° à une force fonction du temps t, soit $F(t)$ cette fonction continue et périodique de période θ.*

On demande les conditions que doivent remplir l'écart initial u_0 et la vitesse angulaire initiale ω_0 pour que le mouvement du solide soit rigoureusement périodique.

On étudiera en particulier les cas suivants.

Premier cas :

$$F(t) = A \sin\left(2\pi \frac{t}{\theta}\right).$$

Deuxième cas :

$$F(t) = B \quad \text{pour} \quad -\varepsilon < t < +\varepsilon,$$
$$F(t) = 0 \quad \text{pour} \quad -\theta < t < -\varepsilon \text{ et } \varepsilon < t < \theta,$$

A et B étant deux constantes non nulles et ε une constante moindre que θ. (Novembre 1906.)

Épreuve pratique. — *On considère un mouvement pendulaire troublé simultanément :*

1° *Par une résistance proportionnelle à la vitesse;*

2° *Par un frottement constant.*

Lorsque la première résistance agit seule, on observe un mouvement oscillatoire amorti dans lequel l'amplitude diminue de moitié après 3600 *oscillations simples.*

Lorsque la deuxième résistance agit seule, on sait que la demi-amplitude diminue à chaque demi-oscillation d'une quantité constante $2f$.

Les deux résistances agissant simultanément, le mobile est écarté de sa position d'équilibre d'un écart initial u_0 *tel que*

$$\frac{f}{u_0} = \frac{1}{1000000}.$$

On demande de calculer le nombre n *d'oscillations simples qui seront exécutées jusqu'à l'extinction du mouvement.* (Novembre 1906.)

Lyon.

Épreuve théorique. — *Un ellipsoïde* E *de révolution se déforme de la façon suivante :* 1° *l'axe ne change ni en grandeur, ni en direction, ni en position;* 2° *le rayon de l'équateur croît proportionnellement au temps;* 3° *chaque point de la surface de* E *reste dans un méridien fixe et à une distance invariable du plan de l'équateur.*

Un point M, *de masse* m, 1° *est astreint de glisser sans frottement sur la surface* E, 2° *est repoussé par l'axe suivant une force perpendiculaire à cet axe et proportionnelle à la distance de* M *à l'axe.*

Étudier le mouvement de M. *Cas particulier où la vitesse initiale est tangente au méridien initial.*

Épreuve pratique. — *Soient :*

H, *une hélice tracée sur un cylindre de révolution;*

M, *un point qui se meut sur* H, *de façon que l'arc* s *de* H, *compté jusqu'en* M *à partir d'un point fixe* M_0, *soit égal au temps* t, *compté à partir d'un certain instant initial,* $s = t$;

MX, *la tangente en* M *à* H, *dirigée dans le sens des arcs croissants;*

MY, *la normale principale, dirigée vers le centre de courbure;*

MZ, *la binormale;*

C, *un corps solide, invariablement lié au trièdre trirectangle* MXYZ.

1° *Quel est l'axe instantané* I *de rotation et de glissement? comment se comporte* I *vis-à-vis d'un spectateur entraîné dans le mouvement? à quoi se réduit, pour un pareil spectateur, le mouvement?*

2° *Quel est le lieu* Γ *des points de* C *dont la vitesse passe par* M ?

3° *Un point* P *se meut dans l'espace de façon que sa vitesse absolue soit un vecteur équipollent au vecteur* ω, *qui représente la rotation instantanée de* C, *au même instant. On donne la position initiale* P_0 *de* P. *Quelle courbe* γ *est décrite par* P *dans* C ?

4° *Il existe des points de* C *pour lesquels l'accélération d'entrainement est nulle. Que devient* γ *quand* P_0 *est un pareil point? Lieu des points de* C *pour lesquels l'accélération a une grandeur donnée fixe.*

5° *Étendre les problèmes* 1° *et* 2° *au cas où* H *est tracée sur un cylindre quelconque.* (Juillet 1906.)

Épreuve théorique. — *On a une roue, de rayon* a, *formée par une circonférence solide, pesante, homogène, d'épaisseur (section) négligeable et de densité linéaire* K. *La circonférence est reliée au centre* O *par des rayons rigides de masse négligeable. Un poids* $Q = mg$ *est appliqué au centre* O.

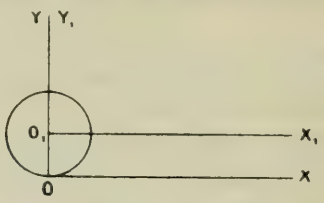
Au début du mouvement, la roue est lancée de manière à remonter, en roulant sans glisser, le long de la ligne de plus grande pente d'un plan, incliné sur l'horizon d'un angle α.

A partir de ce moment, on applique, à un point déterminé M_1 *de la roue, une force* F, *d'intensité constante, mais dirigée dans le sens du mouvement et suivant la tangente en* M_1 *à la roue.*

On suppose que la roue ne peut jamais, par rapport au plan, que rouler sans glisser.

Étudier le mouvement.

Épreuve pratique. — *Dans un plan fixe* Π, *un cercle de rayon a roule sans glisser sur une droite indéfinie* OX. *Le*



cercle tourne autour de son centre avec une vitesse angulaire égale à 1.

Le cercle entraîne dans le mouvement son plan Π_1, *lequel, par suite, glisse sur le plan fixe* Π.

Un point P *se meut dans le plan mobile* Π_1.

Quelle courbe doit décrire P *dans* Π_1 *pour que la vitesse absolue de* P *soit un vecteur égal et directement opposé au vecteur, qui est la vitesse d'entraînement du même point* P? *On cherchera les coordonnées relatives de* P *en fonction :* 1° *du temps* t, 2° *des coordonnées relatives initiales* α *et* β, *pour* $t = 0$.

Quelle courbe décrit alors P *dans le plan* Π ?

On vérifiera que, si Q *est un second point, qui se meut d'après une loi analogue à celle pour* P, *la distance* PQ *reste constante. Il en résulte que* P, Q, ... *sont les différents points d'un plan* Π_2 *qui glisse sur* Π_1 *et, par suite, aussi sur* Π.

Dans le mouvement de Π_2 *sur* Π, *quelles sont les roulettes?*

On suppose que, pour $t = 0$, *les axes fixes* X, O, Y *et mobiles* X_1, O_1, Y_1 *sont disposés comme l'indique la figure.*

(Novembre 1906.)

Nancy.

Épreuve théorique. — *Un ellipsoïde homogène de révolution se meut dans un fluide incompressible homogène indéfini en repos à l'infini; à l'instant initial, on lui a imprimé une rotation autour de son axe de révolution* Oz *et une translation le long de ce même axe* Oz; *les forces données se réduisent à zéro.*

On demande d'étudier le mouvement du centre O *de l'ellipsoïde et le mouvement de l'ellipsoïde autour de son centre.* (Juin 1906.)

Rennes.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Application du principe de d'Alembert à la théorie des percussions.*

II. PROBLÈME. — *Un corps solide pesant est assujetti à se mouvoir d'un mouvement hélicoïdal de pas donné* $2l\pi$, *dont l'axe est vertical.*

Étudier l'effet d'une percussion sur ce corps. Calculer en fonction de la percussion considérée : 1° *l'accroissement de la vitesse angulaire ;* 2° *les percussions de liaisons.*

On suppose le corps primitivement au repos, et la vitesse résultant de la percussion dirigée de telle façon que le corps s'élève. Étudier le mouvement continu subséquent et déterminer la hauteur à laquelle le corps montera.

On néglige le frottement.

Application au cas où le corps considéré est un cylindre de révolution homogène, creux, ayant pour axe de figure l'axe du mouvement.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *D'une origine* O *on veut lancer un mobile pesant de manière à atteindre un point* A *déterminé par son abscisse* a (*horizontale*) *et sa cote* b (*verticale*) *rapportées à l'origine* O. *Déterminer la vitesse initiale minima nécessaire et l'angle de cette vitesse avec l'horizontale.*

Application :

$$a = 4^{m},$$
$$b = 3^{m},$$
$$g = 9^{m},81 \text{ par seconde.}$$

NOTA. — *On néglige toutes résistances de milieu.*

(Novembre 1906.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1898.

(1900, p. 575.)

Soient ABCD *un quadrilatère;* A′, B′, C′, D′ *les centres des cercles inscrits aux triangles* BCD, CDA, DAB, ABC *respectivement;* α, β, γ, δ *les périmètres de ces triangles. Démontrer que le centre de gravité des poids* α, β, γ, δ *placés en* A, B, C, D *est le même que celui des mêmes poids placés en* A′, B′, C′, D′ *respectivement.*

C.-A. Laisant.

SOLUTION

Par M. A. Droz-Farny.

Représentons par $(x'\,y')$ les coordonnées de A, $(x''\,y'')$ celles de B et c; par a, b, c, d, m et n les longueurs AB, BC, CD, DA, BD et AC.

Le centre de gravité des 4 sommets chargés des poids α, β, γ, δ aura pour abscisse

$$x = \frac{\alpha x' + \beta x'' + \gamma x''' + \delta x^{\text{IV}}}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$$

et de même pour y.

L'abscisse de A′ est, d'après une formule connue,

$$x = \frac{c x'' + m x''' + b x^{\text{IV}}}{b + c + m} = \frac{c x'' + m x''' + b x^{\text{IV}}}{\alpha}.$$

Le centre de gravité des 4 points A′, B′, C′, D′ chargés des poids α, β, γ, δ aura donc pour abscisse

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sum \dfrac{c x'' + m x''' + b x^{\text{IV}}}{\alpha}\,\alpha}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \\ &= \frac{x'(m + c + b) + x''(c + d + n) + x'''(a + d + m) + x^{\text{IV}}(a + b + n}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \\ &= \frac{\alpha x' + \beta x'' + \gamma x''' + \delta x^{\text{IV}}}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \end{aligned}$$

qui est bien la valeur trouvée plus haut.

Note. — On sait que A′ est le centre de gravité des poids (CD), (DB), (BC), placés en B, C, D respectivement. En répétant la même observation sur B′, C′, D′, on voit qu'on obtiendra le centre de gravité de ces quatre points affectés de poids égaux aux périmètres des triangles correspondants, en plaçant en A les trois poids (BC), (CD), (DB), et de même pour B, C, D, ce qui démontre la proposition.

Celle-ci s'étend à un système de 5 points dans l'espace, A, B, C, D, E, en considérant les centres A′, ... des sphères inscrites aux tétraèdres BCDE, ... et en remplaçant les périmètres des triangles de l'énoncé par les aires extérieures des tétraèdres considérés. C.-A. L.

2028.

(1905, p. 575.)

Dans un cercle de centre O *et de rayon* R, *soient* AB, BC, CD *trois côtés consécutifs du polygone régulier inscrit de* 14 *côtés. On projette* D *sur* OA, OB, OC, *respectivement en* E, F, G. *Démontrer la relation*

$$DE + DF - DG = \frac{R\sqrt{7}}{2}.$$

(E.-N. Barisien.)

PREMIÈRE SOLUTION
Par M. Letierce.

Une circonférence de rayon 1 étant partagée en sept parties égales, et u_1, u_2, u_3 désignant les côtés des polygones obtenus en joignant les points de division de 1 en 1, de 2 en 2, de 3 en 3, on voit que la relation proposée revient à la suivante :

$$(1) \qquad u_2 + u_3 - u_1 = \sqrt{7}.$$

Or (*voir* Trigonométrie, Polygones réguliers), u_1^2, u_2^2, u_3^2 sont racines de l'équation en u

$$u^3 - 7u^2 + 14u - 7 = 0,$$

donc

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 7,$$

et, par suite,

$$(u_2 + u_3 - u_1)^2 = 7 + 2(u_2 u_3 - u_1 u_2 - u_1 u_3).$$

Le théorème de Ptolémée, appliqué au quadrilatère inscrit de côtés successifs u_1, u_1, u_2, u_3, montre que l'expression entre parenthèses dans le second membre est nulle; donc la relation (1) est démontrée.

SECONDE SOLUTION

Par M. Plakhowo.

On a

$$\begin{aligned} DE + DF - DG &= R\left(\sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right) \\ &= R\left(\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}\right) \\ &= R\left(\sin\frac{1.2\pi}{7} + \sin\frac{2.2\pi}{7} + \sin\frac{4.2\pi}{7}\right). \end{aligned}$$

Les nombres 1, 2, 4 sont les résidus quadratiques de 7. Or, lorsque p est un nombre premier de la forme $4n + 3$, on a

$$1 + 2\sum e^{\alpha\frac{2\pi i}{7}} = i\sqrt{p}.$$

La somme Σ s'étendant à tous les nombres α qui sont résidus quadratiques de p. (Le premier membre est ce qu'on appelle une *somme de Gauss*.)

On tire de là

$$\sin\frac{2\pi}{7} + \sin 2\frac{2\pi}{7} + \sin 4\frac{2\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2},$$

ce qui donne la formule à démontrer.

Autre solution par M. Droz-Farny.

2030.

(1905, p. 576.)

L'antipodaire d'une ellipse par rapport à un des sommets du grand axe est une quartique; l'antipodaire de la même ellipse par rapport à un des sommets du petit axe

est une autre quartique. Montrer que ces deux quartiques ont même aire, équivalente aux $\frac{4}{3}$ de l'aire de la développée de l'ellipse. (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. Letierce.

Soient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

l'équation de l'ellipse, $M(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$ un point de cette courbe et A le sommet situé sur les x positifs.

L'antipodaire par rapport à A est l'enveloppe de la perpendiculaire MN élevée en M à la droite AM, enveloppe définie par

(éq. de MN) $by\sin\varphi - a(a+x)(1-\cos\varphi) + c^2\sin^2\varphi = 0,$

(éq. dérivée) $by\cos\varphi - a(a+x)\sin\varphi + 2c^2\sin\varphi\cos\varphi = 0,$

d'où

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{a(a+x)}{c^2} = \cos\varphi(1+\cos\varphi), \\ \dfrac{by}{c^2} = -\sin\varphi(1-\cos\varphi). \end{cases}$$

L'antipodaire cherchée est donc une courbe unicursale du quatrième degré.

L'aire est donnée par

$$S = \frac{2c^4}{ab}\int_0^\pi \sin^2\varphi(1-\cos\varphi)(1+2\cos\varphi)\,d\varphi$$

$$= \frac{2c^4}{ab}\int_0^\pi (2\sin^4\varphi - \sin^2\varphi)\,d\varphi + \frac{2c^4}{ab}\int_0^\pi \sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi.$$

La première intégrale est égale à $\frac{\pi}{4}$, la seconde est nulle; donc

$$S = \frac{\pi}{2}\,\frac{c^4}{ab}.$$

Or l'aire S′ de la développée est égale à $\frac{3\pi}{8}\frac{c^4}{ab}$; par suite,

$$S = \frac{4}{3}S'.$$

L'antipodaire, par rapport au sommet du petit axe situé sur les y positifs, s'obtient en remplaçant dans les expressions (1) a par b, x par y, φ par $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ et inversement; l'aire est donnée par

$$\frac{2c^4}{ab}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi(1 - \sin\varphi)(1 + 2\sin\varphi)\,d\varphi$$

qui est égale à S.

QUESTIONS.

2074. On donne un quadrilatère complet; les couples de sommets sont A et A′, B et B′, C et C′, les sommets A′, B′, C′ appartenant à un même côté. Des points A, B, C comme centres on décrit trois circonférences (A), (B), (C), qui se coupent deux à deux aux points A_1 et A_2, B_1 et B_2, C_1 et C_2; on trace alors la circonférence (A′) qui a pour centre le point A′ et qui passe aux points A_1 et A_2; on trace de même les circonférences analogues (B′) et (C′).

1° Les trois circonférences (A′), (B′), (C′) ont deux points communs D_1 et D_2, de sorte que les trois couples de circonférences forment un système symétrique.

2° Si les circonférences (A) et (A′) sont orthogonales, ainsi que les circonférences (B) et (B′), il en est de même [1] des circonférences (C) et (C′). Le système des circonférences dépend alors d'un paramètre, et le lieu des points A_1 et A_2, par exemple, est une circonférence ayant son centre sur la droite A′BC et passant par les points communs aux trois circonférences qui ont pour diamètres les diagonales du quadrilatère complet. (G. Fontené.)

[1] Cette propriété a été indiquée par Plücker (*Nouv. Ann.*, 1852, p. 398).

[A1a]

SUR LA DIVISIBILITÉ DES POLYNOMES ENTIERS A PLUSIEURS VARIABLES;

PAR M. CH. MÉRAY.

1. Ayant été ramené à cette théorie, il y a une vingtaine d'années, par le besoin accidentel de l'un de ses points [le théorème du n° 10, III (*inf.*)], je ne l'ai vue nulle part traitée d'une manière tout à fait satisfaisante, et j'ai aperçu le principe de l'exposition que j'en vais présenter.

On saisira facilement l'esprit général de la méthode en remarquant à chaque pas, *qu'elle consiste dans la combinaison des procédés propres au cas d'une seule variable, opérée par voie de récurrence, c'est-à-dire par la réduction d'un cas quelconque à un autre où le degré d'une variable au moins s'est abaissé dans l'un au moins des polynomes à manier, sans s'élever dans les autres.*

Je représenterai par

$$(1) \qquad s, \ t, \ \ldots, \ v, \ x, \ y, \ \ldots, \ w$$

les variables indépendantes qui, en nombre fixe h, seront exclusivement engagées, en totalité ou en partie seulement, dans les polynomes dont je parlerai, et je commence par rappeler et préciser certains faits préliminaires.

I. Un *monome* (entier) en (1) est une expression formée en prenant quelque produit de puissances de

ces variables, à exposants entiers, positifs ou nuls,

$$s^{\sigma} t^{\tau} \ldots v^{\varphi} x^{\xi} y^{\eta} \ldots w^{\psi},$$

puis celui

$$c s^{\sigma} t^{\tau} \ldots v^{\varphi} x^{\xi} y^{\eta} \ldots w^{\psi}$$

du précédent, par quelque *coefficient* constant c.

On *ordonne* ce monome *par rapport à* un groupe donné de ses variables,

$$(2) \qquad x, \quad y, \quad \ldots, \quad w,$$

dites alors *ordonnatrices,* en l'écrivant

$$(c s^{\sigma} t^{\tau} \ldots v^{\varphi}) x^{\xi} y^{\eta} \ldots w^{\psi},$$

c'est-à-dire en le considérant comme formé par la multiplication de ses facteurs en (2) seulement et du produit de son coefficient par ceux en

$$(3) \qquad s, \quad t, \quad \ldots, \quad v$$

seulement, produit qui, à ce point de vue, lui constitue un *nouveau coefficient* ne dépendant plus des variables ordonnatrices.

Par rapport aux variables (2), deux monomes sont *semblables* si, dans l'un et dans l'autre, elles portent des exposants respectivement égaux. Autrement, ils sont *dissemblables.*

Quand le groupe (2) comprend la totalité (1) des variables de la question, la relativité de cette similitude n'est pas mentionnée.

II. Un *polynome* (entier) en (1) se forme en prenant un seul monome à la rigueur, ou, habituellement, la somme de plusieurs dissemblables deux à deux (I), qui soit ses *termes,* et dont les coefficients gardent ce nom pour cette nouvelle expression.

On *ordonne* un polynome *par rapport* aux variables d'un groupe tel que (2), en ordonnant ainsi ses divers termes (1); en sommant, avec chacun d'eux, tous ceux qui lui sont semblables relativement au même groupe, puis en faisant l'addition de toutes ces sommes. On obtient ainsi un polynome en (2), ayant pour *nouveaux coefficients* des polynomes en (3), et, dans leur ensemble, les coefficients proprement dits de ces derniers polynomes se confondent avec ceux mêmes du proposé.

III. *Par rapport* à un groupe de variables tel que (2), le *degré apparent* d'un polynome est le nombre obtenu en formant, pour chaque terme, la somme des exposants portés par ces variables seulement, et prenant la plus grande valeur de ces diverses sommes.

Son *degré effectif* est le résultat de la même opération exécutée sur ceux seulement de ses termes dont les coefficients sont $\neq 0$. C'est lui que désigne toujours le mot *degré* employé seul, sauf mention qu'il s'agit de l'autre.

Quand le degré (effectif) est nul, le polynome, sans cesser de dépendre nominalement des variables (2), n'en dépend pas en réalité; car, affectées des exposants 0, 0, ..., 0 dans les termes à coefficients $\neq 0$, ces variables n'y introduisent que les facteurs constants 1, 1, ..., 1, et les autres termes ont la valeur constante 0, quelles que soient celles des leurs. Nous dirons alors que le polynome est *déchevêtré* des variables (2) en question.

Il en est *enchevêtré* si chacune d'elles porte un exposant > 0 dans quelque terme pourvu d'un coefficient $\neq 0$.

Dans ces diverses dénominations, la mention de

relativité s'omet habituellement, quand le groupe considéré embrasse la totalité (1) des variables de la question.

IV. *Un polynome est identiquement nul, ou non, selon que ses coefficients sont, numériquement, tous nuls, ou non.*

Si tous les coefficients sont nuls, il est évident que le polynome n'a jamais que la valeur o.

Sinon, soient un polynome enchevêtré de la seule variable x (III) et $c_\mu x^\mu$ son terme de moindre degré μ parmi ceux dont les coefficients sont $\neq$ o. La valeur du polynome pouvant s'écrire $(c_\mu + \varepsilon) x^\mu$, où celle de ε peut devenir aussi petite qu'on le veut, moyennant l'attribution à x d'une valeur suffisamment petite *quoique non nulle,* on peut ainsi rendre ε numériquement $< c_\mu$, rendre non nulles en conséquence les valeurs des deux facteurs et cette expression, simultanément, celle par suite de leur produit, c'est-à-dire de l'expression elle-même. Le polynome considéré n'est donc pas nul identiquement.

S'il s'agit d'un polynome enchevêtré de deux variables x, y seulement, soit $c_{\mu,\nu} x^\mu y^\nu$ un de ses termes à coefficient $\neq$ o, et $(\ldots + c_{\mu,\nu} x^\mu + \ldots) y^\nu$ son terme en y^ν dans le résultat de son ordination par rapport à y (II). D'après ce qui vient d'être constaté, et, comme le polynome en x seulement, $\ldots + c_{\mu,\nu} x^\mu + \ldots$, n'est pas nul identiquement, parce que le coefficient $c_{\mu,\nu}$ de son terme laissé en évidence ne l'est pas numériquement, on peut assigner à x une valeur x' qui rend la sienne, $\mathfrak{C}'_\nu$, $\neq$ o. Pour $x = x'$, le polynome proposé se particularise en $\ldots + \mathfrak{C}'_\nu y^\nu + \ldots$, polynome en y seulement dont le terme mis en évidence a un coefficient $\neq$ o, auquel, en conséquence, et par

une nouvelle application de ce qui précède, on peut faire prendre quelque valeur $\neq 0$. Le proposé n'est donc pas nul identiquement.

De là, on passe semblablement aux polynomes enchevêtrés de 3 variables, puis de 4, 5, ..., etc.

Pour abréger, nous dirons un polynome *nul* ou *non-nul*, selon que ses coefficients seront tous nuls, ou non. Sauf mention du contraire, un polynome est toujours sous-entendu non-nul, et, le plus souvent, émondé de ses termes nuls (qui sont sans influence sur sa valeur numérique).

V. *Le produit de plusieurs polynomes est nul* (IV) *quand l'un au moins des facteurs est tel, mais non-nul quand aucun d'eux n'est nul.*

Le premier point résulte immédiatement de ce que, dans ce produit, le coefficient de tout terme est une somme de parties dont chacune se forme en multipliant entre eux les coefficients de termes des polynomes facteurs, pris respectivement dans tous ceux-ci.

D'où la nullité de chacune de ces parties, contenant ainsi un ou plusieurs facteurs nuls numériquement, puis celle de leur somme, coefficient considéré du polynome produit, puis celle de ce polynome.

Pour le second point, considérons d'abord le cas de deux facteurs enchevêtrés de la seule variable x, et soient μ', μ'' leurs degrés (effectifs) (III), $c'_{\mu'}x^{\mu'}$, $c''_{\mu''}x^{\mu''}$ leurs termes de ces degrés. Il est visible que le produit (amené à la forme normale) contient le terme $c'_{\mu'}c''_{\mu''}x^{\mu'+\mu''}$ dont le coefficient n'est pas nul, puisque ses facteurs, $c'_{\mu'}$, $c''_{\mu''}$, ne le sont ni l'un ni l'autre. Le polynome produit est donc non-nul.

De là, aux cas de deux facteurs enchevêtrés de 2 variables, puis de 3, 4, ..., on passe par voie d'ordina-

tions variées et de récurrence, comme nous venons de le faire dans une circonstance analogue (IV).

Soit enfin $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''\ldots\mathfrak{P}^{(j)}$ un produit de j polynomes non nuls quelconques. En vertu de ce qui précède, sont non nuls : les produits $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''$, puis

$$(\mathfrak{P}'\mathfrak{P}'')\mathfrak{P}''' = \mathfrak{P}'\mathfrak{P}''\mathfrak{P}''',$$

puis ..., puis enfin $(\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''\ldots)\mathfrak{P}^{(j)}$ qui est le produit en question.

VI. *Par rapport à tout groupe des variables* (1), *le degré* (*effectif*) (III) *d'un produit de plusieurs polynomes est égal à la somme de ceux de ses facteurs.*

Dans un premier polynome, soit μ' son degré de ce genre, $(\mathcal{G}')_{\mu'}$ le groupe formé par tous ses termes (non nuls) de même degré μ', et $(\mathcal{G}')_{\nu'}$, $(\mathcal{G}')_{\varpi'}$, ... les groupes analogues, de degrés $\nu' < \mu'$, $\varpi' < \nu'$, ..., en sorte que la forme

$$(\mathcal{G}')_{\mu'} + (\mathcal{G}')_{\nu'} + (\mathcal{G}')_{\varpi'} + \ldots$$

puisse être donnée à ce polynome. Soit encore

$$(\mathcal{G}'')_{\mu''} + (\mathcal{G}'')_{\nu''} + (\mathcal{G}'')_{\varpi''} + \ldots$$

la forme analogue donnée à un autre polynome dont le degré est μ''. Le produit de tous deux peut être écrit

$$(\mathcal{G}')_{\mu'}(\mathcal{G}'')_{\mu''} + \ldots,$$

et, en premier lieu, le produit partiel laissé en évidence est non-nul puisque chacun de ses deux facteurs est tel (IV); en second lieu, son développement ne contient évidemment que des termes élémentaires de degré commun $\mu' + \mu''$; en troisième lieu, celui des produits partiels non écrits ne peut donner que des

termes de degrés $< \mu' + \mu''$. On en conclut que le degré du produit des deux polynomes considérés est bien égal à $\mu' + \mu''$, somme de ceux des facteurs.

De ce cas, de deux facteurs seulement, on passe à ceux de 3, 4, ..., par le moyen employé à la fin de l'alinéa précédent (V).

VII. *Deux polynomes sont identiquement égaux ou non selon que, respectivement, les termes (non nuls) de chacun sont semblables à ceux de l'autre et pourvus de coefficients numériquement égaux, ou bien qu'il n'en est pas ainsi.* Car le polynome obtenu en prenant leur différence a pour coefficients les différences de ceux des termes semblables dans les proposés, et il est nul dans le premier cas, non-nul dans le second (IV).

Suivant l'une ou l'autre alternative, nous dirons ces polynomes *égaux* ou *inégaux*.

2. On *divise* un polynome donné $\mathfrak{M}$ *par* un autre $\mathfrak{N}$, on fait la *division* du premier par le second, en en cherchant un troisième dont le produit par le second soit égal au premier (1, VII).

Dans cette opération, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ prennent les noms de *dividende, diviseur,* et, si l'on peut lui trouver quelque résultat $\mathfrak{Q}$, on exprime cette possibilité en disant que $\mathfrak{M}$ est *divisible par* $\mathfrak{N}$, que $\mathfrak{Q}$ est le *quotient* de la division.

Les moyens d'exécution dérivent des observations résumées ci-après.

I. *Si le diviseur est nul* (1, IV), et, comme, en conséquence, son produit par un polynome quelconque l'est toujours (*Ib.*, V), *la division est impossible quand le dividende ne l'est pas, possible quand il*

l'est aussi, mais alors avec indétermination du quotient.

II. *Quand le diviseur est non-nul, le quotient de toute division possible est unique.* Si, en divisant $\mathfrak{M}$ par $\mathfrak{N}$, on trouvait deux quotients inégaux $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, la soustraction membre à membre des identités de définitions

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{N}\mathfrak{Q}_1, \qquad \mathfrak{M} = \mathfrak{N}\mathfrak{Q}_2$$

conduirait à

$$0 = \mathfrak{N}(\mathfrak{Q}_1 - \mathfrak{Q}_2),$$

chose impossible, puisque dans ce produit de deux facteurs le second est non-nul, le premier supposé tel (*Ibid.*).

III. *Quand le dividende est nul, non le diviseur, la division est possible et le quotient est toujours nul.* Car l'identité à réaliser $0 = \mathfrak{N}\mathfrak{Q}$, sous la condition $\mathfrak{N} \neq 0$, l'est toujours et seulement par $\mathfrak{Q} = 0$ (*Ib.*).

Désormais, nous supposerons non nuls, le diviseur toujours, et aussi le dividende quand le contraire n'aura pas été spécifié.

IV. *Pour que la division soit possible, il est nécessaire que, par rapport à tout groupe des variables* (1), *le degré* (*effectif*) ω' *du dividende soit au moins égal à* ω'' *degré du diviseur; et, s'il en est ainsi, le degré analogue* ω *du quotient est donné* a priori *par la formule*

$$\omega = \omega' - \omega''. \tag{4}$$

S'il existe quelque quotient $\mathfrak{Q}$, dont le degré analogue soit ω, l'identité fondamentale $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}\mathfrak{Q}$ entraîne $\omega' = \omega'' + \omega$ (1, VI), d'où $\omega' \geqq \omega''$ et (4).

Maintenant, nous pouvons passer à l'examen de trois cas simples, d'où se déduit la solution complète du problème.

Auparavant, il faut noter que, pour un groupe formé d'une seule variable u enchevêtrant le dividende, le diviseur et le quotient aux degrés υ', υ'', υ, on a aussi bien

$$\upsilon = \upsilon' - \upsilon'',$$

cas particulier de (4) dont l'emploi est continuel.

V. *Le dividende et le diviseur sont des formes*

$$(\mathfrak{M} =)\, \mathrm{M}(s, t, \ldots, v)\, x^{\xi'} y^{\eta'} \ldots w^{\psi'},$$
$$(\mathfrak{N} =)\, \mathrm{N}(s, t, \ldots, v)\, x^{\xi''} y^{\eta''} \ldots w^{\psi''},$$

monomes en $x, y, \ldots, w$, ayant pour coefficients des polynomes déchevêtrés de ces variables.

Si un quotient existe, son ordination par rapport au même groupe (2) ne peut donner qu'un terme, car, autrement, son produit par $\mathfrak{N}$, ordonné de la même manière, en contiendrait plus d'un aussi, alors que $\mathfrak{M}$ n'en a qu'un seul. Il est donc de la même forme

$$(\mathfrak{Q} =)\, \mathrm{Q}(s, t, \ldots, v)\, x^{\xi} y^{\eta} \ldots w^{\psi},$$

où $\mathrm{Q}(s, t, \ldots, v)$, $\xi, \eta, \ldots, \psi$ sont : un polynome déchevêtré de $x, y, \ldots, w$, des exposants entiers non négatifs, à choisir de manière à donner identiquement

$$\begin{aligned} &\mathrm{M}(s, t, \ldots, v)\, x^{\xi'} y^{\eta'} \ldots w^{\psi'} (= \mathfrak{M} = \mathfrak{N}\mathfrak{Q}) \\ &= [\mathrm{N}(s, t, \ldots, v)\, \mathrm{Q}(s, t, \ldots, v)]\, x^{\xi''+\xi} y^{\eta''+\eta} \ldots w^{\psi''+\psi}. \end{aligned}$$

A cette fin, les conditions nécessaires et suffisantes sont visiblement :

1° Pour que le premier membre soit semblable au dernier, relativement à $x, y, \ldots, w$, que l'on ait

$$\xi' = \xi'' + \xi,\ \eta' = \eta'' + \eta,\ \ldots,\ \psi' = \psi'' + \psi.$$

d'où

$$\xi = \xi' - \xi'', \eta = \eta' - \eta'', \ldots, \psi = \psi' - \psi'' \quad (Cf. \text{IV}):$$

2° Pour que les coefficients des termes semblables dans leurs développements complets soient respectivement égaux, que l'on ait identiquement

$$M(s, t, \ldots, v) = N(s, t, \ldots, v)\, Q(s, t, \ldots, v),$$

c'est-à-dire que M soit divisible par N et que Q soit pris égal au quotient de cette division.

Si donc il y a possibilité, on aura

$$\mathfrak{Q} (= \mathfrak{M} : \mathfrak{N}) = (M : N)\, x^{\xi' - \xi''} y^{\eta' - \eta''} \ldots w^{\psi' - \psi''},$$

ce qui ramène le problème au cas de deux polynomes, M, N, *impliquant des variables en nombre inférieur à celui des primitives* (1).

VI. *Le dividende* $\mathfrak{M}$ *est quelconque, le diviseur* $\mathfrak{N}$ *est déchevêtré des variables* (2).

La possibilité de la division exige, comme condition nécessaire et suffisante, *que les coefficients* M_1, M_2, ... *du dividende ordonné par rapport à ce groupe soient tous divisibles par* $\mathfrak{N}$. *Et, sous cette condition, ceux du quotient pareillement ordonné sont les quotients* $M_1 : \mathfrak{N}$, $M_2 : \mathfrak{N}$, ... C'est ce que montre bien facilement l'identification de $\mathfrak{M}$ au produit de $\mathfrak{N}$ par un quotient hypothétique $\mathfrak{Q}$ ordonné de la même manière (*Cf.* V). *L'opération est ramenée au cas de polynomes dépendant des variables* (3) *seulement.*

La condition formulée entraîne visiblement la divisibilité par $\mathfrak{N}$ *des coefficients de* $\mathfrak{M}$, *ordonné par rapport à tout sous-groupe des variables* (2).

VII. *Le dividende et le diviseur sont enchevêtrés d'une même variable* x, *aux degrés* $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ [$\leqq \mathfrak{m}$ (IV)].

Soient alors

$$(\mathfrak{M} =)\, M_m x^m + M_{m-1} x^{m-1} + \ldots,$$
$$(\mathfrak{N} =)\, N_n x^n + N_{n-1} x^{n-1} + \ldots,$$

les résultats de leur ordination par rapport à x suivant ses puissances décroissantes, les M, N étant des polynomes déchevêtrés de cette variable. On pourra commencer et poursuivre la « division algébrique » du premier par le second, comme si les M, N n'étaient que des constantes, cela aussi longtemps que les degrés en x, des premiers termes du dividende et des dividendes partiels consécutifs, resteront $\geqq n$ et leurs premiers coefficients divisibles par N_n.

Quand ces divisibilités se trouvent exister jusqu'au bout et qu'on arrive à un reste nul, on constatera bien facilement que la division de $\mathfrak{M}$ par $\mathfrak{N}$ est possible et que le quotient ordonné par rapport à x se forme terme à terme, comme si cette variable était la seule de la question.

Quand il n'en est pas ainsi, on reconnaîtra avec la même facilité que $\mathfrak{M}$ n'est pas divisible par $\mathfrak{N}$.

Ceci ramène le problème à un cas précédent (V) *et à celui de polynomes dépendant de $h - 1$ variables seulement, par la technique propre au cas élémentaire où le dividende et le diviseur ne sont enchevêtrés que d'une seule variable.*

VIII. Comme chacun de ces moyens déchevêtre toujours de quelque variable, l'un au moins des polynomes qu'il laisse à manier, et cela sans enchevêtrer les autres, il est clair que *leur enchaînement en récurrences convenables conduira sûrement à la réponse comportée par la division proposée.*

IX. On aperçoit immédiatement, que *tout polynome*

est divisible, tant par lui-même, que par une constante quelconque ($\neq 0$). Dans le premier cas, le quotient est 1 ; dans le second, on l'obtient en divisant simplement les coefficients du dividende par la constante diviseur (VI).

3. A la notion de divisibilité, les suivantes se rattachent très étroitement.

I. Deux polynomes sont *semblables* quand l'un est divisible par l'autre et que le quotient de leur division se réduit à une constante, relation évidemment réciproque. Ils sont *dissemblables* s'il en est autrement.

II. Les *diviseurs* d'un polynome donné sont ceux de degrés > 0 qui le *divisent,* c'est-à-dire par lesquels il est divisible (2). *Parmi eux, se trouvent toujours lui-même* (*Ib.* IX) *et, visiblement, les polynomes semblables à tout diviseur qu'on lui connaîtrait déjà.*

On notera que *les constantes ne comptent pas comme diviseurs*, bien qu'elles divisent tous les polynomes quand elles sont $\neq 0$ (*Ibid.*).

Un polynome est *premier,* quand, étant de degré $\neq 0$, il n'a d'autres diviseurs que ses semblables (I) (lui-même compris). *Tel est, visiblement, un polynome quelconque du premier degré.*

III. *Tout polynome non premier peut être mis sous forme d'un produit de facteurs premiers* (*dissemblables ou semblables*)*; et le nombre de ces facteurs est limité,* puisque leurs degrés, tous > 0, ont celui de proposé pour somme. Ce polynome est dit *composé* (de tels facteurs).

(*Dans le cas tout spécial d'un polynome à une*

seule variable, de degré ω, *ces facteurs premiers sont de degré commun* $= 1$, *et en nombre* $= \omega$. Ceci résulte du point fondamental de la théorie des équations entières à une inconnue.)

IV. Un diviseur est *commun* à plusieurs polynomes, quand il divise chacun d'eux séparément.

Quand des polynomes ont un diviseur commun, celui-ci divise aussi toute combinaison faite d'eux par des additions et soustractions; le quotient est la combinaison homonyme de ceux de leurs divisions par ce diviseur.

Des polynomes sont *premiers entre eux*, quand ils sont dépourvus de tout diviseur commun. Ils ne sont alors divisibles simultanément, que par des constantes $\neq 0$.

Des polynomes dissemblables et premiers chacun (dans le sens absolu du mot) sont toujours premiers entre eux.

V. Les *multiples* d'un polynome donné sont tous ceux que celui-ci divise; ils se confondent évidemment avec ses produits par tous les polynomes imaginables; en particulier, ils comprennent ses semblables.

Tout diviseur d'un polynome divise l'un quelconque de ses multiples; le quotient est le produit de celui de la division du polynome par le diviseur, et du multiplicateur qui a fourni le multiple considéré.

Les *multiples communs* de plusieurs polynomes sont tous ceux que divise chacun des proposés.

4. La *division algébrique* est susceptible d'une extension dont nous allons avoir besoin.

Les polynomes $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ du n° 2, VII *étant repris, on peut en assigner un troisième* ${}^{(x)}\mathfrak{P}$ *déchevêtré de* x, *qui rende possible la* division algébrique *du produit* ${}^{(x)}\mathfrak{P}\mathfrak{M}$ *par* $\mathfrak{N}$, *c'est-à-dire qui permette la formation de l'identité.*

$$(5) \qquad {}^{(x)}\mathfrak{P}\mathfrak{M} = \mathfrak{Q}\mathfrak{N} + \mathfrak{R},$$

où $\mathfrak{Q}$ *et* $\mathfrak{R}$ *sont des polynomes dont les degrés en* x *ont des valeurs* $= \mathfrak{m} - \mathfrak{n}$ *et* $< \mathfrak{n}$.

I. Soient $N_{\mathfrak{n}} x^{\mathfrak{n}}$ toujours, le premier terme de $\mathfrak{N}$, puis $M_{\mathfrak{m}_i}^{(i)} x^{\mathfrak{m}_i}$ celui d'un dividende partiel $\mathfrak{M}^{(i)}$ ordonné comme $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ l'ont été. Aussi longtemps que $\mathfrak{m}_i$ sera $\geqq \mathfrak{n}$, on assurera la possibilité de la division partielle correspondante en multipliant $\mathfrak{M}^{(i)}$ par quelque polynome ${}^{(x)}\mathfrak{p}^{(i)}$ déchevêtré de x, choisi de manière à donner avec $M_{\mathfrak{m}_i}^{(i)}$ un produit ${}^{(x)}\mathfrak{p}^{(i)} M_{\mathfrak{m}_i}^{(i)}$ qui soit divisible par $N_{\mathfrak{n}}$; à cette fin, il suffira de prendre, pour le multiplicateur ${}^{(x)}\mathfrak{p}^{(i)}$, $N_{\mathfrak{n}}$ toujours (3, V), un polynome de degré moindre parfois (16, *inf.*), 1 même seulement, quand la division partielle à exécuter sera possible d'emblée, c'est-à-dire quand $M_{\mathfrak{m}_i}^{(i)}$ se trouvera divisible par $N_{\mathfrak{n}}$.

En représentant alors par $\mathfrak{q}^{(i)}$ le quotient

$$\left[\left({}^{(x)}\mathfrak{p}^{(i)} M_{\mathfrak{m}_i}^{(i)}\right) : N_{\mathfrak{n}}\right] x^{\mathfrak{m}_i - \mathfrak{n}},$$

par $\mathfrak{M}^{(i+1)}$ la différence ${}^{(x)}\mathfrak{p}^{(i)}\mathfrak{M}^{(i)} - \mathfrak{q}^{(i)}\mathfrak{N}$, dont le degré en x est $< \mathfrak{m}_i$, il vient

$$(6) \qquad {}^{(x)}\mathfrak{p}^{(i)}\mathfrak{M}^{(i)} = \mathfrak{q}^{(i)}\mathfrak{N} + \mathfrak{M}^{(i+1)}.$$

II. En faisant successivement ici $i = 0, 1, 2, \ldots$, on trouvera

$$(7) \qquad \begin{cases} {}^{(x)}\mathfrak{p}\mathfrak{M} = \mathfrak{q}\mathfrak{N} + \mathfrak{M}^{(1)}, \\ {}^{(x)}\mathfrak{p}^{(1)}\mathfrak{M}^{(1)} = \mathfrak{q}^{(1)}\mathfrak{N} + \mathfrak{M}^{(2)}, \\ {}^{(x)}\mathfrak{p}^{(2)}\mathfrak{M}^{(2)} = \mathfrak{q}^{(2)}\mathfrak{N} + \mathfrak{M}^{(3)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

et l'on poursuivra aussi longtemps que m_{i+1} degré de $\mathfrak{M}^{(i+1)}$ restera $\geqq n$. Comme les entiers $m, m_1, m_2, \ldots$ vont sans cesse en diminuant de 1 au moins chaque fois, on atteindra certainement une différence $\mathfrak{M}^{(j+1)}$ dont le degré sera $< n$, à laquelle, en conséquence, on sera forcé de s'arrêter; et la récurrence (7) se terminera par

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ {}^{(x)}\mathfrak{p}^{(j-1)}\mathfrak{M}^{(j-1)} = \mathfrak{q}^{(j-1)}\mathfrak{N} - \mathfrak{M}^{(j)}, \\ {}^{(x)}\mathfrak{p}^{(j)}\mathfrak{M}^{(j)} \quad = \mathfrak{q}^{(j)}\mathfrak{N} \quad + \mathfrak{M}^{(j+1)}. \end{array}\right.$$

Pour obtenir enfin la relation cherchée (5), il suffit maintenant d'ajouter membre à membre celles de l'ensemble (7) et (8), multipliées respectivement par les produits

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} {}^{(x)}\mathfrak{p}^{(1)}\,{}^{(x)}\mathfrak{p}^{(2)}\,{}^{(x)}\ldots\mathfrak{p}^{(j-1)}, \quad {}^{(x)}\mathfrak{p}^{(2)}\,{}^{(x)}\mathfrak{p}^{(3)}\ldots{}^{(x)}\mathfrak{p}^{(j-1)}, \\ \quad {}^{(x)}\mathfrak{p}^{(3)}\ldots{}^{(x)}\mathfrak{p}^{(j-1)}, \quad \ldots, \quad {}^{(x)}\mathfrak{p}^{(j-1)}, \quad 1, \end{array}\right.$$

puis de noter ${}^{(x)}\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{R}$ les sommes des produits de ces multiplicateurs par les ${}^{(x)}\mathfrak{p}, \ldots$, par les $\mathfrak{q}, \ldots$ et $\mathfrak{M}^{(j+1)}$.

Les multiplicateurs (9) étant, comme leurs facteurs ${}^{(x)}\mathfrak{p}, \ldots$, tous déchevêtrés de x, on observera : que ${}^{(x)}\mathfrak{P}$ est tel, que le degré de $\mathfrak{Q}$ en x est $m - n$ puisque ceux de $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}^{(1)}, \mathfrak{q}^{(2)}, \ldots$ sont $m - n, m_1 - n, m_2 - n, \ldots$, en suite sans cesse décroissante, que celui de

$$\mathfrak{R}\,[= \mathfrak{M}^{(j+1)}]$$

est $< n$, ce que nous avons déjà vu.

III. Il est essentiel de noter que *la construction de la relation* (5) *comporte simplement l'algorithme de la* division algébrique *à une seule variable ordonnatrice, combiné avec le maniement de polynomes déchevêtrés de cette variable, c'est-à-dire en contenant une de moins que les proposés.* On supprimerait même toute difficulté dans ce maniement, en pre-

nant invariablement $N_{\mathfrak{n}}$ pour chacun des multiplicateurs ${}^{(x)}\mathfrak{p}$, ${}^{(x)}\mathfrak{p}^{(1)}$, ...

On pourrait donner à cette opération le nom de *quasi-division* relative à la variable ordinatrice x, de $\mathfrak{M}$ par $\mathfrak{N}$, à ces polynomes et à $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, ceux de *quasi-dividende, quasi-diviseur et quasi-quotient, quasi-reste*, à ${}^{(x)}\mathfrak{P}$ celui de *préparateur*.

La *division algébrique* n'étant que le cas particulier qui se présente quand le préparateur se réduit à 1, ces dénominations lui seraient bien mieux appropriées que celles du langage courant, puisque la *divisibilité* proprement dite du dividende par le diviseur n'est qu'une éventualité tout à fait exceptionnelle.

Au n° 16 (*inf.*), nous verrons qu'on peut toujours s'arranger de manière à rendre premiers entre eux le préparateur et le quasi-quotient.

5. *Les mêmes polynomes* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ (2, VII), (4) *étant encore repris, on peut en assigner trois autres,*

$$(9\ bis) \qquad \mathfrak{P},\quad \mathfrak{Q},\quad {}^{(x)}\mathfrak{F},$$

dont le dernier est déchevêtré de x, dont les deux premiers sont non-nuls (1, IV), *avec des degrés* $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ *en x remplissant les conditions*

$$\mathfrak{p} < \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{q} < \mathfrak{m},$$

et qui, tous trois, donnent avec $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ *la relation*

$$(10) \qquad \mathfrak{P}\mathfrak{M} + \mathfrak{Q}\mathfrak{N} = {}^{(x)}\mathfrak{F}.$$

I. La suite de polynomes

$$\mathfrak{M},\quad \mathfrak{N},\quad \mathfrak{N}_1,\quad \ldots,\quad \mathfrak{N}_{i-1},\quad \mathfrak{N}_i,\quad \mathfrak{N}_{i+1},\quad \mathfrak{N}_{i+2},\quad \ldots.$$
$$\mathfrak{N}_{j-1},\quad \mathfrak{N}_j,\quad \mathfrak{N}_{j+1},\quad \mathfrak{N}_{j+2},$$

qui commence par les proposés et se poursuit par ceux qu'on rencontre successivement à partir du troisième, en prenant chaque fois le quasi-reste de la quasi-divi-

sion de l'antiprécédent par le précédent (4, III), s'arrête forcément à un terme $\mathfrak{N}_{j+2}$ déchevêtré de x. Leurs degrés en x forment effectivement une suite décroissante

$$(11) \qquad m \geqq n > n_1 > n_2 > \ldots > n_{j+1} > n_{j+2} (= 0),$$

puisque, dans toute quasi-division, celui du quasi-reste est inférieur à celui du quasi-diviseur; et un entier non négatif décroissant finit toujours par atteindre la valeur 0.

Si ces quasi-divisions ont

$$(12) \qquad {}^{(x)}\mathfrak{p}, \quad {}^{(x)}\mathfrak{p}_1, \quad \ldots, \quad {}^{(x)}\mathfrak{p}_i, \quad {}^{(x)}\mathfrak{p}_{i+1}, \quad \ldots, \quad {}^{(x)}\mathfrak{p}_j, \quad {}^{(x)}\mathfrak{p}_{j+1},$$

$$(13) \qquad \mathfrak{q}, \quad \mathfrak{q}_1, \quad \ldots, \quad \mathfrak{q}_i, \quad \mathfrak{q}_{i+1}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{q}_j, \quad \mathfrak{q}_{j+1}$$

pour préparateurs et quasi-quotients, ceux-ci changés de signes, elles seront formulées par les relations,

$$(14) \qquad \left\{ \begin{array}{l} {}^{(x)}\mathfrak{p}\,\mathfrak{M} + \mathfrak{q}\,\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1, \\ {}^{(x)}\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{N} + \mathfrak{q}_1\,\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ {}^{(x)}\mathfrak{p}_i\,\mathfrak{N}_{i-1} + \mathfrak{q}_i\,\mathfrak{N}_i = \mathfrak{N}_{i+1}, \\ {}^{(x)}\mathfrak{p}_{i+1}\,\mathfrak{N}_i + \mathfrak{q}_{i+1}\,\mathfrak{N}_{i+1} = \mathfrak{N}_{i+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ {}^{(x)}\mathfrak{p}_j\,\mathfrak{N}_{j-1} + \mathfrak{q}_j\,\mathfrak{N}_j = \mathfrak{N}_{j+1}, \\ {}^{(x)}\mathfrak{p}_{j+1}\,\mathfrak{N}_j + \mathfrak{q}_{j+1}\,\mathfrak{N}_{j+1} = \mathfrak{N}_{j+2}, \end{array} \right.$$

desquelles, en procédant de bas en haut, comme nous allons l'indiquer, on déduira successivement celles-ci en même nombre $j + 2$:

$$(15) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{P}\,\mathfrak{M} + \mathrm{Q}\,\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_{j+2}, \\ \mathrm{P}_1\,\mathfrak{N} + \mathrm{Q}_1\,\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_{j+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{P}_i\,\mathfrak{N}_{i-1} + \mathrm{Q}_i\,\mathfrak{N}_i = \mathfrak{N}_{j+2}, \\ \mathrm{P}_{i+1}\,\mathfrak{N}_i + \mathrm{Q}_{i+1}\,\mathfrak{N}_{i+1} = \mathfrak{N}_{j+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{P}_j\,\mathfrak{N}_{j-1} + \mathrm{Q}_j\,\mathfrak{N}_j = \mathfrak{N}_{j+2}, \\ \mathrm{P}_{j-1}\,\mathfrak{N}_j + \mathrm{Q}_{j+1}\,\mathfrak{N}_{j+1} = \mathfrak{N}_{j+2}. \end{array} \right.$$

Pour la dernière de (15), on prendra simplement celle de (14), c'est-à-dire qu'on fera

$$(16) \qquad P_{j+1} = {}^{x}\mathfrak{p}_{j+1}, \qquad Q_{j+1} = \mathfrak{q}_{j+1}.$$

Ensuite et généralement, on formera celle de (15) où l'indice commun de P, Q est i ($< j + 1$), en prenant le résultat de l'élimination de $\mathfrak{N}_{i+1}$ entre celle du même tableau où cet indice est $i + 1$, et celle de (14) où ${}^{x}\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ portent l'indice i, élimination faite de manière à donner

$$(17) \qquad P_i = {}^{x}\mathfrak{p}_i Q_{i+1}, \qquad Q_i = P_{i+1} + \mathfrak{q}_i Q_{i+1}.$$

Tout ceci ayant été exécuté, il suffira, pour former la relation cherchée (10), de prendre

$$(18) \qquad \mathfrak{P} = P, \qquad \mathfrak{Q} = Q, \qquad {}^{x}\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{j+2},$$

où $\mathfrak{N}_{j+2}$ est déchevêtré de x, et nous allons constater que P, Q remplissent les conditions imposées à $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ par l'énoncé.

II. Nous représenterons par ..., X_i, ... les degrés en x (effectifs) des polynomes (13) tous non-nuls comme quotients de quasi-divisions possibles à dividendes non-nuls, et par ..., Π_i, ..., par ..., X_i, ..., ceux des ..., P_i, ..., des Q_i, ..., dont nous allons reconnaître la non-nullité.

1° On a

$$\chi \geqq 0, \quad \chi_1 > 0, \quad \ldots, \quad \chi_i > 0, \quad \chi_{i+1} > 0, \quad \ldots, \quad \chi_j > 0, \quad \chi_{j+1} > 0.$$

Conséquence immédiate de l'égalité $\chi_i = u_{i-1} - u_i$ et des inégalités (11).

2° *Si les inégalités*

$$(19) \qquad P_{i+1} \neq 0, \qquad Q_{i-1} \neq 0,$$

$$(20) \qquad \Pi_{i-1} < X_{i-1}$$

existent, on aura encore

(21) $$P_i \neq 0, \qquad Q_i \neq 0,$$

avec

(22) $$\Pi_i = X_{i+1}, \qquad X_i = \chi_i + X_{i+1},$$

d'où, soit

(23) $$\Pi_i < X_i, \qquad si \quad i > 0 \qquad (1^\circ),$$

soit

(24) $\Pi \geqq X$, *si* $i = 0$, *selon que* $\chi = m - n$ *est* $\gtrless 0$ (*Ib.*).

A cause de $Q_{i+1} \neq 0$ (19), de l'inégalité de principe $(x)\mathfrak{p}_i \neq 0$, la première formule (17) donne immédiatement $P_i \neq 0$ (21), puis $\Pi_i = X_{i+1}$ (22), par sa combinaison avec le fait que les préparateurs (12) sont déchevêtrés de x.

Pour la même cause, et parce que $\mathfrak{q}_i \neq 0$, la dernière partie de l'expression de Q_i (17) est non-nulle, avec $\chi_i + X_{i+1}$ pour degré (en x); la première partie étant non nulle aussi (19), mais de degré Π_{i+1} qui est $< X_{i+1}$ (20), cette expression est non-nulle et de degré $\chi_i + X_{i+1}$. La seconde relation (19) conduit donc aux secondes relations (21) et (22), d'où (23) ou bien (24) suivant le cas.

3° A cause de (16) entraînant

$$\Pi_{j+1} = 0, \qquad X_{j+1} = \chi_{j+1} > 0,$$

les inégalités (19), (20) ont lieu pour $i = j + 1$; elles subsistent donc pour $i = j, j - 1, \ldots, 1, 0$ (2°).

4° En faisant $i = 1, 2, \ldots, j$ successivement dans la seconde égalité (22), se rappelant que $X_{j+1} = \chi_{j+1}$ (16) $= n_j - n_{j+1}$ parce que $\mathfrak{q}_{j+1}$ est le quasi-quotient

de la quasi-division de $\mathfrak{N}_j$ par $\mathfrak{N}_{j+1}$, et ajoutant membre à membre, il vient

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} X_1 &= \chi_1 + \chi_2 + \ldots + \chi_{j+1} \\ &= (\mathfrak{n} - \mathfrak{n}_1) + (\mathfrak{n}_1 - \mathfrak{n}_2) + \ldots + (\mathfrak{n}_j - \mathfrak{n}_{j+1}) \\ &= \mathfrak{n} - \mathfrak{n}_{j+1}. \end{aligned}\right.$$

On en conclut $\Pi = X_1$ (22) $< \mathfrak{n}$ (11).

Enfin, la seconde égalité (22) et (25) donnent immédiatement $X = (\mathfrak{m} - \mathfrak{n}) + (\mathfrak{n} - \mathfrak{n}_{j+1}) = \mathfrak{m} - \mathfrak{n}_{j+1}$, d'où $X < \mathfrak{m}$, dernier point nous restant à établir.

III. La formation de la relation (10) sous les conditions posées peut se nommer l'*élimination* de *x entre* les polynomes $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$; les polynomes (9 *bis*) en sont les *multiplicateurs* et le (polynome) *final*.

6. *Quand un polynome premier* $\mathfrak{N}$ (3, II) *divise le produit* $\mathfrak{L}\mathfrak{M}$ *de deux autres* (*premiers ou composés*), *mais non le second facteur* $\mathfrak{M}$, *il divise l'autre* $\mathfrak{L}$ *forcément.*

Notre démonstration comporte l'examen successif des cas distingués ci-après.

I. $\mathfrak{N}$ *n'est enchevêtré que de tout ou partie du groupe* (3); $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ *le sont, tant de* (3) *que de* (2); *le théorème a été démontré dans tous les cas où chacun de ces trois polynomes ne l'est que de tout ou partie de* (3).

1° *Sous ces hypothèses, et si notre théorème est vrai quand* $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, *enchevêtrés de* (3), *ne le sont en outre que de quelque sous-groupe de* (2), *il subsiste après l'adjonction d'une nouvelle variable x à ce sous-groupe.*

Cette adjonction ayant été faite, soient

$$(\mathfrak{L} =) L_l x^l + L_{l-1} x^{l-1} + \ldots,$$
$$(\mathfrak{M} =) M_m x^m + M_{m-1} x^{m-1} + \ldots$$

les résultats de l'ordination de ces polynomes par rapport à x, dont les coefficients L, M en sont déchevêtrés, et dont les termes ont été écrits dans l'ordre où leurs degrés (en x) décroissent.

Comme les M ne sont pas tous divisibles par $\mathfrak{N}$, sans quoi $\mathfrak{M}$ le serait (2, VI), contrairement à l'hypothèse, l'un d'eux au moins M_μ sera non divisible à l'exclusion de ses précédents M_m, M_{m-1}, ..., $M_{\mu-1}$, et en écrivant

$$\mathfrak{L}\mathfrak{M} - \mathfrak{L}(M_m x^m + M_{m-1} x^{m-1} + \ldots + M_{\mu-1} x^{\mu-1})$$
$$= \mathfrak{L}(M_\mu x^\mu + \ldots),$$

le second membre sera divisible par $\mathfrak{N}$ puisque les deux parties du premier le sont (3, IV), l'une par hypothèse, l'autre à cause de la même divisibilité des coefficients M_m, M_{m-1}, ..., $M_{\mu-1}$. Mais on a

$$\mathfrak{L}(M_\mu x^\mu + \ldots) = (L_l x^l + \ldots)(M_\mu x^\mu + \ldots)$$
$$= L_l M_\mu x^{l+\mu} + \ldots,$$

développement où le terme laissé en évidence n'en a visiblement aucun autre semblable. Il faut donc (2, VI) que $L_l M_\mu$, coefficient de ce terme, soit divisible par $\mathfrak{N}$, et, par suite, en vertu de l'hypothèse spéciale au présent sous-alinéa, que L_l le soit, puisque M_μ ne l'est pas.

On a ensuite

$$\mathfrak{L}(M_\mu x^\mu + \ldots) - L_l x^l (M_\mu x^\mu + \ldots)$$
$$= (L_{l-1} x^{l-1} + \ldots)(M_\mu x^\mu + \ldots),$$

produit encore divisible par $\mathfrak{N}$, comme les deux parties

du premier membre où L_l l'est. De même qu'à l'instant, et en vertu de la même hypothèse, la non divisibilité de M_μ entraînera la divisibilité de L_{l-1}, puis, successivement, de L_{l-2}, ..., L_0, puis finalement celle de $\mathfrak{L}$ (*Ib.*).

2° L'exactitude du point en question ayant été admise pour le cas où $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ sont déchevêtrés de (2), ce qui précède l'étendra à ceux où l'on introduit dans ces polynomes les variables x d'abord, puis y après x, puis z après x et y, puis ..., puis w finalement.

II. *$\mathfrak{M}$ n'est enchevêtré que de tout ou partie de* (3); *$\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ le sont de tout ou partie, tant de* (2) *que de* (3); *le théorème a été démontré dans tous les cas où chacun de ces trois polynomes ne l'est que de tout ou partie de* (3).

Nommons $\mathfrak{Q}$ le quotient de la division du produit $\mathfrak{L}\mathfrak{M}$, par $\mathfrak{N}$, qui est supposée possible.

1° Si $\mathfrak{M}$ est déchevêtré des variables (3) encore, il se réduit à une constante, et le point en question est évident. Car le quotient $\mathfrak{Q} : \mathfrak{M}$ est un polynome entier semblable à $\mathfrak{Q}$ (3, I), et l'identité

$$\mathfrak{L}\mathfrak{M} = \mathfrak{Q}\mathfrak{N} \tag{26}$$

donne immédiatement $\mathfrak{L} = (\mathfrak{Q} : \mathfrak{M})\,\mathfrak{N}$.

2° Sinon, soient $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_3$, ..., $\mathfrak{m}_j$ des facteurs premiers en lesquels $\mathfrak{M}$ peut être décomposé (*Ib.*, III), facteurs tous déchevêtrés de (2) puisqu'il en est ainsi pour leur produit $\mathfrak{M}$ (1, VI). L'identité (26) s'écrira

$$\mathfrak{L}\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\mathfrak{m}_3\ldots\mathfrak{m}_j = \mathfrak{Q}\mathfrak{N}, \tag{27}$$

et, comme $\mathfrak{m}_1$ divise le premier membre (3, V), il divisera le second, mais non le facteur premier $\mathfrak{N}$ de

celui-ci; car il lui serait semblable (*Ib.*, II), et, divisant $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{N}$ diviserait $\mathfrak{M}$ (*Ib.*, V) contrairement à l'hypothèse. Ce facteur $\mathfrak{m}_1$ divise donc $\mathfrak{Q}$ (I), et, en nommant $\mathfrak{Q}_1$ le quotient $\mathfrak{Q} : \mathfrak{m}_1$ de cette division, celle des deux membres de (27) par le même diviseur conduit à

$$\mathfrak{L}\,\mathfrak{m}_2\mathfrak{m}_3\ldots\mathfrak{m}_j = \mathfrak{Q}_1\,\mathfrak{N} \quad (3, \mathrm{V}).$$

On prouvera de la même manière que $\mathfrak{m}_2$ divise $\mathfrak{Q}_1$, puis que $\mathfrak{m}_3, \ldots, \mathfrak{m}_j$ divisent $\mathfrak{Q}_2, \ldots, \mathfrak{Q}_{j-1}$ quotients de ces divisions enchaînées. En nommant enfin $\mathfrak{Q}_j$ celui de la dernière, on obtiendra successivement les identités

$$\mathfrak{L}\,\mathfrak{m}_3\ldots\mathfrak{m}_j = \mathfrak{Q}_2\,\mathfrak{N}, \qquad \ldots, \qquad \mathfrak{L}\,\mathfrak{m}_j = \mathfrak{Q}_{j-1}\,\mathfrak{N}, \qquad \mathfrak{L} = \mathfrak{Q}_j\,\mathfrak{N},$$

dont la dernière formule précisément le fait à établir.

III. *$\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ sont enchevêtrés chacun, de tout ou partie du groupe* (3) *et de x seulement dans l'autre* (2), *ceci à des degrés quelconques* $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$; *le théorème a été démontré dans tous les cas où chacun des trois polynomes ne l'est que de tout ou partie de* (3).

Entre $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ nous éliminerons x par la relation

$$(28) \qquad \mathfrak{P}\mathfrak{M} + \mathfrak{Q}\mathfrak{N} = {}^{(x)}\mathfrak{F},$$

où ${}^{(x)}\mathfrak{F}$ est déchevêtré de x, où les degrés (en x) de $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ sont $\mathfrak{p} < \mathfrak{n}$, $\mathfrak{q} < \mathfrak{m}$ (5).

1° *Sous les hypothèses actuelles* (III), *et si notre théorème est vrai pour* $\mathfrak{n} = \nu$, *entier* $\geqq 1$, *il l'est encore pour* $\mathfrak{n} = \nu + 1$.

Supposons $\mathfrak{n} = \nu + 1$.

A. *Tout polynome premier* $\mathfrak{p}$ *dont le degré* (*en x*) *est* $\leqq \nu$, *et qui divise le produit* $\mathfrak{Q}\mathfrak{N}$, *divise* $\mathfrak{Q}$ *aussi.*

Dissemblable au polynome premier $\mathfrak{N}$, comme étant de degré inférieur à $\nu + 1$ degré de celui-ci, il ne peut le diviser.

Si $\mathfrak{p}$ est déchevêtré de x, il divise $\mathfrak{Q}$ par application du dispositif de l'alinéa I.

S'il en est enchevêtré, $\mathfrak{Q}$ l'est forcément aussi. Autrement $\mathfrak{Q}$ serait non divisible par $\mathfrak{p}$, le dispositif de l'alinéa II serait applicable aux trois polynomes $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{p}$ (substitués respectivement à $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ du lieu cité), et $\mathfrak{N}$ serait divisible par $\mathfrak{p}$ contrairement à ce que nous venons de constater. Les polynomes $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{p}$ sont alors enchevêtrés de x, tous trois; le troisième est premier, de degré $< \nu + 1$, et divise $\mathfrak{Q}\mathfrak{N}$ sans diviser $\mathfrak{N}$; il divise donc $\mathfrak{Q}$ en vertu de l'hypothèse additionnelle propre au présent sous-alinéa 1°.

B. *Le polynome* ${}^{(x)}\mathfrak{F}$ *est non-nul.*

Autrement la relation (28) donnerait

$$\mathfrak{P}\mathfrak{M} = -\mathfrak{Q}\mathfrak{N},$$

ce dont nous allons reconnaître l'impossibilité.

Si $\mathfrak{P}$ se réduit à une constante, $-\mathfrak{Q} : \mathfrak{P}$ serait un polynome entier, et l'on aurait $\mathfrak{M} = (-\mathfrak{Q} : \mathfrak{P})\mathfrak{N}$, chose impossible puisque nous admettons que $\mathfrak{M}$ n'est pas divisible par $\mathfrak{N}$.

Sinon, tout facteur premier de $\mathfrak{P}$ diviserait $\mathfrak{Q}\mathfrak{N}$, $\mathfrak{Q}$ par suite (A), parce que son degré, égal au plus à celui de $\mathfrak{P}$ qui est essentiellement inférieur à $\nu + 1$ degré de $\mathfrak{N}$, est $\leqq \nu$. En raisonnant ensuite comme tout à l'heure (II, 2°), on trouverait que $\mathfrak{M}$ est divisible par $\mathfrak{N}$, contrairement à ce que nous avons supposé.

C. Finalement, si l'on multiplie (28) par $\mathfrak{L}$, il vient

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{L}\mathfrak{M}) + \mathfrak{Q}\mathfrak{L}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{L}\,{}^{(x)}\mathfrak{F}, \tag{29}$$

ceci montrant que $\mathfrak{N}$ divise $\mathfrak{L}^{(x)}\mathfrak{F}$, comme divisant $\mathfrak{L}\mathfrak{M}$ par hypothèse, $\mathfrak{N}$ en fait, les deux parties du premier membre par suite (3, IV). Or, enchevêtré de x, il ne peut diviser le second facteur $^{(x)}\mathfrak{F}$ de ce produit, qui, non-nul (B), en est au contraire déchevêtré. Il en divise donc l'autre facteur $\mathfrak{L}$ (II).

2° *Sous les mêmes hypothèses* (III), *notre théorème est vrai pour* $n = 1$.

Les raisonnements sont identiques à ceux des sections (A), (B), (C) du sous-alinéa précédent (1°), avec cette simplification pourtant que, $p < n$ étant ici $= 0$, tous les facteurs premiers de $\mathfrak{P}$ sont, comme lui-même, déchevêtrés de x.

3° *Sous les mêmes hypothèses* (III), *notre théorème est vrai pour toutes les valeurs de* n. Conséquence immédiate de la combinaison des sous-alinéas 1°, 2°.

IV. $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ *sont enchevêtrés de* x, *déchevêtrés de toutes autres variables; rien du théorème n'a encore été établi.*

Les raisonnements sont ceux de l'alinéa III, avec les menues modifications suivantes :

Dans la section A de son sous-alinéa 1°, $\mathfrak{p}$ ne peut être déchevêtré de x, puisque, ne dépendant alors d'aucune variable, il se réduirait à une constante et ne serait pas un *diviseur* du produit $\mathfrak{L}\mathfrak{N}$ (3, II); si $\mathfrak{L}$ n'était pas enchevêtré de x, il se réduirait à une constante pour la même cause, et, semblable alors au polynome premier $\mathfrak{N}$, le produit en question ne pourrait être divisible par $\mathfrak{p}$, contrairement à l'hypothèse spéciale à cette section.

Dans la section B du même sous-alinéa, le polynome

non nul $^{(x)}\mathfrak{F}$ se réduit à une constante Φ, puisque, déchevêtré essentiellement de x, la seule variable de la question, il ne dépend d'aucune.

Dans le sous-alinéa 2°, $\mathfrak{P}$ se réduit à une constante Π, et la relation finale (29) prend la forme

$$\Pi(\mathfrak{L}\mathfrak{M}) + \mathfrak{Q}\mathfrak{L}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{L}\Phi,$$

sur laquelle la divisibilité de $\mathfrak{L}$ par $\mathfrak{N}$ est plus visible encore.

V. Des cas examinés ci-dessus, on passe à tous les autres par la marche progressive dont les premières et principales étapes sont indiquées ci-après, avec leurs références.

α. — $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{L}$ *sont enchevêtrés de x seulement* [(IV)].

β. — $\mathfrak{N}$ *est enchevêtré de x seulement; $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{L}$ le sont de x, y seulement* [(α), (I)].

γ. — $\mathfrak{N}$ *est enchevêtré de x, y seulement; $\mathfrak{M}$ ne l'est que de y; $\mathfrak{L}$ est comme* $\mathfrak{N}$ [(α), (β), (II)].

δ. — $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{L}$ *sont enchevêtrés de x, y seulement* [(α), (β), (γ), (III)].

ε. — $\mathfrak{N}$ *est enchevêtré de x, y seulement; $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{L}$, de x, y, z seulement* [(α), (β), (γ), (δ), (I)].

η. — $\mathfrak{N}$ *est enchevêtré de x, y, z; $\mathfrak{M}$ ne l'est que de y, z; $\mathfrak{L}$ est comme* $\mathfrak{N}$ [(α), (β), (γ), (δ), (ε), (II)].

. . . . . .

(La condition imposée à $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{L}$ de dépendre des variables successivement désignées, par voie d'enchevêtrement *proprement dit,* non à titre simplement *nominal,* a eu pour but de donner brièveté et complète précision à la spécification de ces divers cas, et

d'en montrer plus nettement la progression. Mais, dans le cas (β) par exemple, l'un des polynomes $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{L}$ pourrait être déchevêtré de y, tous deux pourraient être enchevêtrés d'autres variables quelconques accompagnant x. Et de même dans les autres.)

7. *Un polynome premier $\mathfrak{N}$ qui divise le produit $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \ldots \mathfrak{M}_k$ de polynomes quelconques, divise l'un au moins d'entre eux, lui est semblable en conséquence si ce facteur est premier aussi.*

Car $\mathfrak{N}$ divise le produit de deux facteurs seulement $\mathfrak{M}_1 (\mathfrak{M}_2 \ldots \mathfrak{M}_k) = \mathfrak{M}_1 \ldots \mathfrak{M}_k$; si donc il ne divise pas $\mathfrak{M}_1$, il divisera le produit $\mathfrak{M}_2 \ldots \mathfrak{M}_k$ (6). On verra de même que, s'il ne divise pas $\mathfrak{M}_2$, il divise $\mathfrak{M}_3 \ldots \mathfrak{M}_k$, et ainsi de suite, puis finalement que, s'il ne divise pas $\mathfrak{M}_{k-1}$, il divise $\mathfrak{M}_k$.

8. *En décomposant un même polynome quelconque en facteurs premiers* (3, III), *on ne trouve jamais ceux-ci qu'en un même nombre et respectivement semblables, pour chaque décomposition, à ceux provenant de toute autre* (*conçus dans un ordre convenable*).

I. *Quand un produit ${}_i\mathfrak{P}$ de i polynomes premiers $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_i$ est semblable à un autre produit ${}^{j}\mathfrak{P}$ de $j \leq i$ facteurs de ce genre, on a $i = j$, et les facteurs de chacun sont respectivement semblables à ceux de l'autre* (*conçus dans un ordre convenable*).

Le facteur $\mathfrak{N}_1$ de ${}_i\mathfrak{P}$ divise évidemment le polynome semblable ${}^{(j)}\mathfrak{P}$, divise en conséquence l'un $\mathfrak{N}'$ des facteurs de celui-ci (7), lui est même semblable puisque $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}'$ sont premiers (3, II), et les quotients

${}_i\mathfrak{P} : \mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2 \ldots \mathfrak{T}_i$, ${}^{(j)}\mathfrak{P} : \mathfrak{T}' = (\ldots)'$ sont évidemment semblables aussi.

De là on conclut, de la même manière, que $\mathfrak{T}_2$, facteur de $\mathfrak{T}_2 \ldots \mathfrak{T}_i$ est semblable à quelque facteur $\mathfrak{T}''$ de $(\ldots)'$, que les quotients ${}_i\mathfrak{P} : (\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2)$, ${}^{(j)}\mathfrak{P} : (\mathfrak{T}' \mathfrak{T}'')$ le sont encore, et ainsi de suite, jusqu'à épuisement des facteurs de ${}_i\mathfrak{P}$. A ce moment, le polynome ${}_i\mathfrak{P} : (\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \ldots \mathfrak{T}_i)$, auquel ${}^{(j)}\mathfrak{P} : (\mathfrak{T}' \mathfrak{T}'' \ldots \mathfrak{T}^{(i)})$ est encore semblable, se réduit à une constante; il faut donc que ce dernier se réduise aussi à une constante, ceci entraînant $i = j$.

II. De là notre théorème, puisque deux décompositions quelconques conduisent à des groupes de facteurs dont les produits sont égaux, au polynome proposé chacun, mutuellement par suite, semblables en particulier.

9. Comme on amène immédiatement des polynomes semblables à l'égalité, en les multipliant par des constantes convenables, *on peut sous-entendre l'introduction préalable de tels multiplicateurs, et, par cette convention, simplifier considérablement le langage*. Au lieu de l'énoncé précédent (8), on dira par exemple :

Tout polynome peut, d'une seule manière, être mis sous forme d'un produit de puissances de polynomes premiers inégaux (c'est à-dire dissemblables).

Le seul mot *décomposition* est très commode pour désigner cette opération et aussi son résultat.

10. Une certaine suite de théorèmes intéressants

découlent presque immédiatement de ceux des n°s 6 et 7, qui sont fondamentaux; mais, dans leurs énoncés, dans leurs démonstrations, ils ont une telle analogie avec ceux qui, en Arithmétique, se groupent autour de la décomposition des nombres entiers en facteurs premiers, qu'il serait tout à fait superflu de les exposer ici. J'en mentionnerai trois seulement, le premier appuyant tous les autres, le second et le troisième plus particulièrement utiles.

I. *La décomposition* (9) *du produit de plusieurs polynomes est le produit des facteurs inégaux qui appartiennent à l'ensemble des décompositions de ceux-ci, chacun de ces facteurs premiers étant pourvu d'un exposant égal à la somme de ceux qu'il porte dans ces diverses décompositions.*

II. *Un polynome* (*quelconque*) *qui divise un produit de deux facteurs en étant premier à l'un de ceux-ci* (3, IV) *divise l'autre* (*Cf.* 6).

III. *Quand un polynome est divisible séparément par d'autres dont deux quelconques sont premiers entre eux* (3, IV), *il l'est aussi par leur produit.*

11. Des polynomes quelconques

$$(30) \qquad \mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \ldots,\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{F},\ \ldots,\ \mathfrak{H}$$

étant donnés, si, dans l'ensemble des facteurs premiers de leurs décompositions, on affecte chacun de ceux-ci du moindre des exposants qu'il porte chez les unes et chez les autres (o quand il ne figure pas dans toutes), la multiplication de ces puissances donne un nouveau polynome unique Δ, dont les propriétés caractéristiques sont maintenant très visibles.

I. *Tout diviseur de* Δ (*lui-même compris*) *est diviseur commun pour tous les polynomes proposés. Inversement, ceux-ci n'ont pas d'autres diviseurs communs que ceux de* Δ.

Ce dernier Δ est ainsi celui des diviseurs communs des proposés, dont le degré (total) est le plus grand, raison pour laquelle on le nomme *leur plus grand commun diviseur*.

[Des polynomes premiers entre eux (3, IV) n'ont pas de plus grand commun diviseur proprement dit, puisqu'ils ne sont divisibles simultanément que par des constantes (*Ib.*, II). Mais on leur attribue conventionnellement parfois une constante pour plus grand commun diviseur.]

II. *Les quotients*

$$\frac{\mathfrak{A}}{\Delta}, \quad \frac{\mathfrak{B}}{\Delta}, \quad \ldots, \quad \frac{\mathfrak{K}}{\Delta}$$

sont premiers entre eux. Réciproquement, un polynome Δ *est le plus grand commun diviseur des proposés* (30), *s'il les divise tous, en donnant des quotients premiers entre eux.*

III. *Si le groupe* (30) *est partagé d'une manière quelconque en plusieurs sous-groupes*

$$(31) \qquad (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots), \quad (\mathfrak{C}, \mathfrak{F}, \ldots), \quad \ldots$$

ayant respectivement Δ_1, Δ_2, ... *pour plus grands communs diviseurs, celui du groupe total est le plus grand commun diviseur de* Δ_1, Δ_2, ...

Cette observation réduit la recherche du plus grand commun diviseur de polynomes en nombre quelconque, à de simples réitérations de celle concernant deux polynomes seulement.

12. En plaçant chaque facteur des décompositions des mêmes polynomes (30) sous un exposant égal au plus grand de ceux qu'il porte dans les unes et dans les autres, puis en faisant le produit de ces puissances, on forme un autre polynome ∇, unique encore, qui est caractérisé par des propriétés inverses, en quelque sorte, de celles du plus grand commun diviseur.

I. *Tout multiple de* ∇ *(lui-même compris) est un multiple commun de tous les polynomes* (30), (3, V). *Inversement, ceux-ci n'ont pas d'autres multiples communs que les multiples de* ∇.

Ce polynome est donc celui de moindre degré (total) parmi les multiples communs des proposés; à cause de cela, on le nomme *leur plus petit commun multiple*.

[Quand les polynomes (30) sont premiers entre eux *deux à deux*, leur plus petit commun multiple est leur simple produit (10, III).]

II. *Les quotients*

$$\frac{\nabla}{\mathfrak{A}},\quad \frac{\nabla}{\mathfrak{B}},\quad \ldots,\quad \frac{\nabla}{\mathfrak{K}}$$

sont premiers entre eux, et, si ∇ *est un polynome rendant de tels quotients premiers entre eux, il est le plus petit commun multiple des proposés* (*Cf.* 11, II).

III. *On peut obtenir encore le plus petit commun multiple des polynomes* (30) *en prenant celui de* $\nabla_1, \nabla_2, \ldots,$ *polynomes remplissant la même fonction pour les sous-groupes* (31) *respectivement* (*Cf. Ib.*, III).

13. *Le plus grand commun diviseur* Γ *et le plus*

petit commun multiple Π *de deux polynomes* A, B *seulement, sont liés entre eux et à ceux-ci par la relation*

$$\Gamma\Pi = AB.$$

En nommant A′, B′ les quotients des divisions de A, B par leur plus grand commun diviseur Γ, on a $A'B'\Gamma = \Pi$, puisque $A'B'\Gamma : A = A'B'\Gamma : A'\Gamma = B'$ et $A'B'\Gamma : B = A'$ sont premiers entre eux (11, II), (12, II). Et, multipliée par Γ, cette relation donne bien $\Gamma\Pi = A'B'\Gamma^2 = A'\Gamma . B'\Gamma = AB$.

Combinée avec les observations des n°s 11 (III) et 12 (III), cette proposition ramène la recherche du plus petit commun multiple des polynomes (30) à celle des plus grands communs diviseurs d'une succession d'autres groupes se rattachant au proposé par un enchaînement que sa simplicité rend très visible.

14. La recherche du plus grand commun diviseur de polynomes donnés, celle aussi de leur plus petit commun multiple (13), ne seraient que des jeux, si la décomposition d'un polynome en facteurs premiers n'était une opération des plus ardues, dès qu'il dépend de plus d'une variable et que son degré surpasse 2. Mais ici il y a surabondance dans les conditions du problème, et, ainsi qu'il arrive en pareil cas, cette circonstance le rend impossible ou bien lui donne des facilités spéciales. La solution dérive du théorème suivant, ou bien encore de celui du n° 17 (*inf.*), dont l'application pratique semble moins laborieuse.

Pour des polynomes $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ *tous deux enchevêtrés de* x *et sans diviseur commun déchevêtré de cette variable, soit*

$$(32) \qquad \mathfrak{P}\mathfrak{M} + \mathfrak{Q}\mathfrak{N} = {}^{(x)}\mathfrak{F}$$

la relation opérant entre eux l'élimination de x (5).

I. *Si* ${}^{(x)}\mathfrak{F}$ *est non-nul,* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ *sont premiers entre eux.*

II. *Si* ${}^{(x)}\mathfrak{F} = 0$, *le plus grand commun diviseur* $\mathfrak{d}$ *de* $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ *est déchevêtré de* x, *les quotients* $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} : \mathfrak{d}$, $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q} : \mathfrak{d}$ *divisent* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ *respectivement, en donnant*

$$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{Q}'} = \frac{-\mathfrak{N}}{\mathfrak{P}'}, \tag{33}$$

et chacun de ces polynomes égaux est le plus grand commun diviseur des proposés.

I. Si $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ avaient un diviseur commun, celui-ci serait enchevêtré de x, puisqu'ils n'en ont aucun qui en soit déchevêtré. Appartenant au premier membre de (32), ce diviseur en diviserait le second ${}^{(x)}\mathfrak{F}$ aussi. Or c'est impossible, puisqu'il est enchevêtré de x, alors que ${}^{(x)}\mathfrak{F}$, non-nul, en est essentiellement déchevêtré.

II. 1° *Dans aucune des relations* (15), *les multiplicateurs* P_i, Q_i *n'ont un diviseur premier commun qui soit enchevêtré de* x.

Si un tel diviseur existait, il diviserait ${}^{(x)}\mathfrak{p}_i Q_{i+1}$ d'après la première formule de la paire (17), Q_{i+1} deuxième facteur de ce produit par suite, puisqu'il n'en divise pas le premier ${}^{(x)}\mathfrak{p}_i$ essentiellement déchevêtré de x (6). Divisant ainsi Q_i et Q_{i+1} à la fois, il diviserait P_{i+1} aussi en vertu de la seconde formule de la même paire. Divisant simultanément P_{i+1}, Q_{i+1}, on trouverait semblablement qu'il divise P_{i+2}, Q_{i+2}, puis P_{i+3}, Q_{i+3}, puis ..., jusqu'à P_{j+1}, Q_{j+1}. Or ce dernier fait est impossible, puisque P_{j+1} est donné par la

première des formules (16), dont le second membre est essentiellement déchevêtré de x.

2° En particulier, P, Q, dans la première de ces relations, jouissent de cette propriété, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ aussi, pris égaux à ces polynomes (18). Le plus grand commun diviseur $\mathfrak{d}$ de ces derniers est donc déchevêtré de x (11).

3° L'hypothèse ${}^{(x)}\mathfrak{F} = 0$ et la division simultanée de $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ par $\mathfrak{d}$ réduisent la relation (32) à

$$\mathfrak{P}'\mathfrak{M} = -\mathfrak{Q}'\mathfrak{N}, \tag{34}$$

celle-ci montrant que $\mathfrak{P}'$ divise le produit $\mathfrak{Q}'\mathfrak{N}$. Mais $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} : \mathfrak{d}$ est premier à $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q} : \mathfrak{d}$ (11, II); il divise donc $\mathfrak{N}$ (10, II). Pour une cause semblable, $\mathfrak{Q}'$ divise $\mathfrak{M}$, et (34) conduit à (33).

4° Les quotients

$$\mathfrak{M} : (\mathfrak{M} : \mathfrak{Q}') = \mathfrak{Q}', \qquad \mathfrak{N} : (-\mathfrak{N} : \mathfrak{P}') = -\mathfrak{P}'$$

étant premiers entre eux, comme nous venons de le dire, chacun des deux membres de (33) est bien le plus grand commun diviseur de $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ (11, II).

15. Maintenant, et en supposant remplies les conditions voulues pour l'existence du plus grand commun diviseur, on peut amorcer comme il suit la gradation qui conduit à celui de deux polynomes quelconques $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$.

α. — *$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ sont enchevêtrés d'une seule variable x.*

Comme ils ne peuvent avoir aucun diviseur commun déchevêtré de x, le théorème (14) leur est immédiatement applicable. Pour cause semblable, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ sont

premiers entre eux, et $\mathfrak{M} : \mathfrak{Q} = - \mathfrak{N} : \mathfrak{P}$ est le plus grand commun diviseur cherché.

β. — $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ *sont enchevêtrés de deux variables x, y seulement.*

Soient $\ldots + M_y^{(i)} x^i + \ldots$ et $\ldots + N_y^{(j)} x^j + \ldots$ leurs ordinations par rapport à x, et ∂_y le plus grand commun diviseur de tous les coefficients $\ldots, M_y^{(i)}, \ldots, \ldots, N_y^{(j)}, \ldots$, enchevêtré comme ceux-ci de y exclusivement (11, III), (α). Les quotients $\mathfrak{M} : \partial_y$, $\mathfrak{N} : \partial_y$ n'ont visiblement aucun diviseur commun déchevêtré de x; on formera donc leurs polynomes connexes $\mathfrak{P}_y$, $\mathfrak{Q}_y$ puis $\mathfrak{P}'_y$, $\mathfrak{Q}'_y$, ensuite leur plus grand commun diviseur $(\mathfrak{M} : \partial_y) : \mathfrak{Q}'_y = - (\mathfrak{N} : \partial_y) : \mathfrak{P}'_y$ (14, II) donnant visiblement $\mathfrak{M} : \mathfrak{Q}'_y = - \mathfrak{N} : \mathfrak{P}'_y$ pour celui de $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$.

γ. — $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ *sont enchevêtrés de trois variables x, y, z seulement.*

En nommant $\partial_{y,z}$ le plus grand commun diviseur de $\ldots, M_{y,z}^{(i)}, \ldots, \ldots, N_{y,z}^{(j)}, \ldots$, coefficients des ordinations de $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ par rapport à x (11, III), (β), puis $\mathfrak{P}_{y,z}$, $\mathfrak{Q}_{y,z}$ et $\mathfrak{P}'_{y,z}$, $\mathfrak{Q}'_{y,z}$, polynomes connexes à $\mathfrak{M} : \partial_{y,z}$, $\mathfrak{N} : \partial_{y,z}$ (14, II), on aura

$$(\mathfrak{M} : \partial_{y,z}) : \mathfrak{Q}'_{y,z} = - (\mathfrak{N} : \partial_{y,z}) : \mathfrak{P}'_{y,z}$$

pour le plus grand commun diviseur de ces quotients et $\mathfrak{M} : \mathfrak{Q}'_{y,z} = - \mathfrak{N} : \mathfrak{P}'_{y,z}$ pour celui de $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$.

δ. — $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ *sont enchevêtrés de quatre variables seulement.*

Semblablement.... Et ainsi de suite.

16. Avant de poursuivre, nous avons un complément à donner au théorème du n° 4.

Dans toute quasi-division, on peut, d'une seule manière, prendre les préparateurs des quasi-divisions partielles respectivement premiers aux quasi-quotients correspondants, et l'on confère ainsi la même propriété relative à ceux, ${}^{(x)}\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, *de toute l'opération.*

I. De même qu'au lieu cité, nous représenterons par $N_{\mathfrak{n}}$, $M^{(i)}_{\mathfrak{m}_i}$ les coefficients de $x^{\mathfrak{n}}$, $x^{\mathfrak{m}_i}$ dans le quasi-diviseur $\mathfrak{N}$ et le quasi-dividende $\mathfrak{M}^{(i)}$ de l'opération partielle exprimée par la récurrence courante (6), par $\gamma^{(i)}$ et ${}'N_{\mathfrak{n}}$, ${}'M^{(i)}_{\mathfrak{m}_i}$, en outre, le plus grand commun diviseur de ces coefficients et les quotients de leurs divisions par lui.

Pour que ${}^{(x)}\mathfrak{p}^{(i)}\gamma^{(i)}{}'M^{(i)}_{\mathfrak{m}_i}$ soit divisible par $\gamma^{(i)}{}'N_{\mathfrak{n}}$, il faut et il suffit que ${}^{(x)}\mathfrak{p}^{(i)}{}'M^{(i)}_{\mathfrak{m}_i}$ le soit par ${}'N_{\mathfrak{n}}$, puis, en conséquence, que ${}^{(x)}\mathfrak{p}^{(i)}$ le soit par ${}'N_{\mathfrak{n}}$, puisque ce diviseur est premier à ${}'M^{(i)}_{\mathfrak{m}_i}$ (10, II). En nommant donc $\varkappa^{(i)}$ le quotient de cette dernière division, on aura

$$ {}^{(x)}\mathfrak{p}^{(i)}M^{(i)}_{\mathfrak{m}_i} = \varkappa^{(i)}{}'N_{\mathfrak{n}}\gamma^{(i)}{}'M^{(i)}_{\mathfrak{m}_i}, $$

polynome dont le quotient de la division par

$$ N_{\mathfrak{n}} = \gamma^{(i)}{}'N_{\mathfrak{n}} $$

est $\varkappa^{(i)}{}'M^{(i)}_{\mathfrak{m}_i}$; et, pour que ce quotient soit premier au préparateur ${}^{(x)}\mathfrak{p}^{(i)} = \varkappa^{(i)}{}'N_{\mathfrak{n}}$, il faut que $\varkappa^{(i)}$ se réduise à une constante, c'est-à-dire que ${}^{(x)}\mathfrak{p}^{(i)}$ soit pris égal (semblable) à ${}'N_{\mathfrak{n}}$ (9), cette condition étant évidemment suffisante.

Désormais, nous supposerons que les préparateurs de toutes les quasi-divisions partielles ont été déterminés de cette manière.

II. Soient alors

$$(35) \qquad {}^{x}\mathfrak{p}^{(i-1)}\,\mathfrak{M}^{(i+1)} = \mathfrak{Q}^{(i+1)}\,\mathfrak{N} + \mathfrak{M}^{(j+1)}$$

le résultat des éliminations successives de $\mathfrak{M}^{(j)}$, $\mathfrak{M}^{(j-1)}$, ..., $\mathfrak{M}^{(i+3)}$, $\mathfrak{M}^{(i+2)}$ entre les récurrences (7), (8) dont les premiers membres montrent les accents j, $j-1$, ..., $i+1$, et

$$({}^{x}\mathfrak{p}^{(i)})\,\mathfrak{M}^{(i)} = \mathfrak{Q}^{(i)}\,\mathfrak{N} - \mathfrak{M}^{(j+1)}$$

celui de l'élimination de $\mathfrak{M}^{(i+1)}$ entre cette relation (35) et la récurrence

$$({}^{x}\mathfrak{p}^{(i)})\,\mathfrak{M}^{(i)} = \mathfrak{q}^{(i)}\,\mathfrak{N} + \mathfrak{M}^{(i+1)}$$

qui se trouve immédiatement au-dessus des précédentes.

Si $({}^{x}\mathfrak{P}^{(i+1)})$, $\mathfrak{Q}^{(i+1)}$ *sont premiers entre eux,* $({}^{x}\mathfrak{P}^{(i)})$, $\mathfrak{Q}^{(i)}$ *le sont aussi.*

On a effectivement

$$({}^{x}\mathfrak{p}^{(i)}) = {}^{x}\mathfrak{p}^{(i+1)}\,{}^{x}\mathfrak{p}^{(i)}, \qquad \mathfrak{Q}^{(i)} = ({}^{x}\mathfrak{p}^{(i+1)})\,\mathfrak{q}^{(i)} + \mathfrak{Q}^{(i+1)},$$

moyennant quoi un diviseur premier commun ν des premiers membres diviserait $({}^{x}\mathfrak{P}^{(i+1)})$, sinon $({}^{x}\mathfrak{p}^{(i)})$ (6), et $({}^{x}\mathfrak{P}^{(i+1)})\,\mathfrak{q}^{(i)}$, $\mathfrak{Q}^{(i+1)}$ dans les deux cas, puisque $({}^{x}\mathfrak{P}^{(i+1)})$ est déchevêtré de x, que $\mathfrak{q}^{(i)}$ est un monome en x de degré $m_i - n > m_{i+1} - n$ degré du polynome $\mathfrak{Q}^{(i+1)}$. Dans le premier cas, ν diviserait à la fois $({}^{x}\mathfrak{P}^{(i+1)})$, $\mathfrak{Q}^{(i+1)}$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Dans le second, où il diviserait ${}^{x}\mathfrak{p}^{(i)}$ mais non $({}^{x}\mathfrak{P}^{(i+1)})$, il diviserait aussi $\mathfrak{q}^{(i)}$, autre facteur du produit $({}^{x}\mathfrak{P}^{(i+1)})\,\mathfrak{q}^{(i)}$, ce qui n'a pas lieu puisque ${}^{x}\mathfrak{p}^{(i)}$, $\mathfrak{q}^{(i)}$ sont premiers entre eux (I *in fine*).

III. Comme les préparateurs sont respectivement premiers aux quasi-quotients dans la dernière et

l'avant-dernière des récurrences (7), (8), le raisonnement précédent (II) montrera qu'il en est de même pour ${}^{(x)}\mathfrak{P}^{(j-1)}$ relativement à $\mathfrak{Q}^{(j-1)}$, puis, de là, pour ${}^{(x)}\mathfrak{P}^{(j-2)}$, $\mathfrak{Q}^{(j-2)}$, puis ..., puis enfin pour ${}^{(x)}\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, préparateur et quasi-quotient de la quasi-division considérée.

17. *Pour les polynomes* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ *du n°* 14, *toujours enchevêtrés de* x *et sans diviseur commun déchevêtré de cette variable, exécutons dans les conditions du n°* 16 *les quasi-divisions* (14) *du n°* 5.

Si $\mathfrak{N}_{j+2} \neq 0$, *ces polynomes sont premiers entre eux.*

Si $\mathfrak{N}_{j+2} = 0$, *les quotients* $\mathfrak{N}'_j$, $\mathfrak{N}'_{j+1}$ *des divisions de* $\mathfrak{N}_j$, $\mathfrak{N}_{j+1}$ *par le plus grand commun diviseur* ${}^{(x)}\delta$ *des coefficients de leurs ordinations par rapport à* x *sont respectivement divisibles par* $\mathfrak{q}_{j+1}$, ${}^{(x)}\mathfrak{p}_{j+1}$, *on a*

$$\frac{\mathfrak{N}'_j}{\mathfrak{q}_{j+1}} = \frac{-\mathfrak{N}'_{j+1}}{{}^{(x)}\mathfrak{p}_{j+1}}, \tag{36}$$

et chacun de ces polynomes égaux est le plus grand commun diviseur des proposés.

I. Tout diviseur commun de $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ divise aussi $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, ... $\mathfrak{N}_{j+1}$, $\mathfrak{N}_{j+2}$. Il résulte en effet : de la première des récurrences (14) qu'il divise $\mathfrak{N}_1$, de la seconde, qu'il divise $\mathfrak{N}_2$ puisqu'il divise $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_1$ simultanément, et ainsi de suite jusqu'à $\mathfrak{N}_{j+2}$.

Les polynomes $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ sont donc premiers entre eux quand $\mathfrak{N}_{j+2} \neq 0$, puisque leurs diviseurs communs, s'ils en avaient, seraient enchevêtrés de x, alors que $\mathfrak{N}_{j+2}$ en est essentiellement déchevêtré.

II. En supposant maintenant $\mathfrak{N}_{j+2} = 0$, tout poly-

nome sans diviseur déchevêtré de x, qui divise $\mathfrak{N}_{j+1}$, $\mathfrak{N}_j$ simultanément, divise encore $\mathfrak{N}_{j-1}$, $\mathfrak{N}_{j-2}$, ..., $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$. Car, en vertu de l'avant-dernière des récurrences (14), il divise le produit ${}^{(x)}\mathfrak{p}_j\,\mathfrak{N}_{j-1}$, son dernier facteur $\mathfrak{N}_{j-1}$ par conséquent, puisque, sans diviseur déchevêtré de x, il ne peut en avoir aucun appartenant aussi à ${}^{(x)}\mathfrak{p}_j$. Puis de même pour $\mathfrak{N}_{j-2}$, ... jusqu'à $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$.

III. Il y a identité ainsi entre le plus grand commun diviseur de $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ et celui de $\mathfrak{N}'_j$, $\mathfrak{N}'_{j+1}$. Car tout diviseur de $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ divise $\mathfrak{N}_j = {}^{(x)}\partial\mathfrak{N}'_j$, $\mathfrak{N}_{j+1} = {}^{(x)}\partial\mathfrak{N}'_{j+1}$ (I), puis $\mathfrak{N}'_j$, $\mathfrak{N}'_{j+1}$, comme étant sans diviseur déchevêtré de x, sans diviseur commun par suite avec ${}^{(x)}\partial$ déchevêtré de cette variable; car tout diviseur commun de $\mathfrak{N}'_j$, $\mathfrak{N}'_{j+1}$ divise aussi $\mathfrak{N}_j$, $\mathfrak{N}_{j+1}$ sans avoir un facteur déchevêtré de x, divise par suite $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ (II).

Comme $\mathfrak{N}_{j+2} = 0$, la division par ${}^{(x)}\partial$ de la dernière relation du groupe (14) est possible et laisse

$$ {}^{(x)}\mathfrak{p}_{j+1}\,\mathfrak{N}'_j + \mathfrak{q}_{j+1}\,\mathfrak{N}'_{j+1} = 0, $$

ceci conduisant à (36); parce que, rendus premiers entre eux (16), ${}^{(x)}\mathfrak{p}_{j+1}$, $\mathfrak{q}_{j+1}$ divisent $\mathfrak{N}'_{j+1}$, $\mathfrak{N}'_j$ respectivement. Et les membres de cette relation (36) sont bien tous deux égaux au plus grand commun diviseur de $\mathfrak{N}'_j$, $\mathfrak{N}'_{j+1}$, à celui de $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ par suite, parce que les quotients $\mathfrak{N}'_j(\mathfrak{N}'_j : \mathfrak{q}_{j+1}) = \mathfrak{q}_{j+1}$ et $\mathfrak{N}'_j(\mathfrak{N}'_{j+1} : {}^{(x)}\mathfrak{p}_{j+1}) = {}^{(x)}\mathfrak{p}_{j+1}$ sont premiers entre eux.

Aussi bien que celui du n° 14, ce théorème peut être employé à la recherche du plus grand commun diviseur de deux polynomes quelconques, dont la marche générale a été exposée tout à l'heure (15).

18. Pour terminer, voici deux théorèmes utiles, qui,

au rebours des précédents, n'ont point de pendants en Arithmétique.

Pour qu'un polynome premier $\mathfrak{N}$ divise un polynome $\mathfrak{M}$ quelconque, il est nécessaire et suffisant que toutes les valeurs des variables qui l'annulent numériquement annulent $\mathfrak{M}$ aussi.

Le premier point est évident. Pour établir le second, nous remarquerons que ces polynomes sont forcément enchevêtrés tous deux d'une même variable au moins, que nous nommerons x et que nous éliminerons entre eux par la relation

$$(37) \qquad \mathfrak{P}\mathfrak{M} + \mathfrak{Q}\mathfrak{N} = {}^{(x)}\mathfrak{F}(y, z, \ldots),$$

${}^{(x)}\mathfrak{F}$ étant déchevêtré de x, les multiplicateurs $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ ayant par rapport à x des degrés respectivement inférieurs à ceux de $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$ (5). Aux variables y, z, ..., dont ${}^{(x)}\mathfrak{F}$ dépend à l'exclusion de x, nous attribuerons ensuite un système quelconque y', z', ... de valeurs particulières.

Si ces valeurs annulent la totalité des coefficients de l'ordination de $\mathfrak{N}$ par rapport à x, elles annulent $\mathfrak{N}$ forcément aussi, $\mathfrak{M}$ encore par suite et par hypothèse, et, en vertu de (37), on a numériquement

$$(38) \qquad {}^{(x)}\mathfrak{F}(y', z', \ldots) = 0.$$

Si, pour $y = y'$, $z = z'$, ..., les coefficients des termes de cette ordination, où x a des exposants > 0, ne s'évanouissent pas tous, l'équation en x

$$(39) \qquad \mathfrak{N}(x, y', z' \ldots) = 0$$

a quelque racine x', donnant ainsi $\mathfrak{N}(x', y', z', \ldots) = 0$, puis, par hypothèse, $\mathfrak{M}(x', y', z', \ldots) = 0$ et (38) encore, à cause de (37).

Si les mêmes attributions numériques annulent la totalité des coefficients qui viennent d'être spécifiés, l'équation (39) ne peut être résolue; mais on verra facilement qu'à quelqu'une des variables y, z, ..., à z pour fixer les idées, on peut attribuer leur valeur z'' infiniment voisine de z', à x une valeur correspondante x'', qui donnent $\mathfrak{N}(x'', y', z'', \ldots) = 0$, d'où $\mathfrak{M}(x'', y', z'', \ldots) = 0$ par hypothèse, puis

$$^{(x}\mathfrak{F}(y', z'', \ldots) = 0,$$

d'après la relation (37). Si maintenant on fait tendre z'' vers z', il vient

$$\lim {}^{(x}\mathfrak{F}(y', z'', \ldots) = 0 = {}^{(x}\mathfrak{F}(y', z', \ldots).$$

Le polynome $^{(x}\mathfrak{F}(y, z, \ldots)$ s'évanouit donc numériquement pour toutes les combinaisons de valeurs de ses variables, c'est-à-dire identiquement. La relation (37) se réduit donc à

$$\mathfrak{P}\mathfrak{M} + \mathfrak{Q}\mathfrak{N} = 0,$$

ceci montrant que $\mathfrak{N}$ divise le produit $\mathfrak{P}.\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$ par suite, puisque la supériorité de son degré en x, comparé à celui de $\mathfrak{P}$, s'oppose à ce qu'il divise ce dernier polynome (6).

19. Pendant un instant, nous nommerons *grade* d'un polynome quelconque $\mathfrak{M}$, relativement à un autre premier donné $\mathfrak{N}$, l'entier $M (\geq 0)$ jouissant de la propriété que $\mathfrak{M}$ soit divisible par $\mathfrak{N}^M$, non par $\mathfrak{N}^{M+1}$, tel ainsi, que l'on ait $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}^M \mathfrak{Q}$, le quotient $\mathfrak{Q}$ étant non divisible par $\mathfrak{N}$.

Si maintenant on représente par

$$(40) \qquad \mathfrak{M}, \ \mathfrak{M}', \ \mathfrak{M}'', \ \ldots$$

des dérivées de $\mathfrak{M}$ par rapport aux variables dont $\mathfrak{N}$ est enchevêtré, prises respectivement au hasard dans les ordres (totaux) 0, 1, 2, ..., on a ce théorème :

Le grade M *de* $\mathfrak{M}$ *est égal à l'ordre de la première des dérivées* (40) *qui n'est pas divisible par* $\mathfrak{N}$.

Toute dérivation (première) de $\mathfrak{M}$ par rapport à ces variables diminue de 1 son grade (supposé > 0). On trouve effectivement, en prenant D pour signe de cette dérivation,

$$D\mathfrak{M} = D(\mathfrak{N}^M \mathfrak{Q}) = \mathfrak{N}^M . D\mathfrak{Q} + M\mathfrak{N}^{M-1}(D\mathfrak{N} . \mathfrak{Q}),$$

et, comme $\mathfrak{N}$ est premier, il ne divise ni $D\mathfrak{N}$ ayant un degré inférieur au sien par rapport à la variable de dérivation, ni $\mathfrak{Q}$ par hypothèse. Il en résulte que le dernier terme du second membre est divisible par $\mathfrak{N}^{M-1}$, non par $\mathfrak{N}^M$ (7), puis, qu'il en est de même pour tout ce membre ayant son autre terme divisible par $\mathfrak{N}^M$. En d'autres termes, $M - 1$ est le grade de $D\mathfrak{M}$.

La réitération de ce raisonnement montre bien facilement que les grades des dérivées (40) calculées jusqu'à l'ordre M sont

$$\begin{gathered} M, \quad M-1, \quad M-2, \quad \ldots, \\ M-(M-1)=1, \qquad M-M=0, \end{gathered}$$

comme il suffisait de le constater.

Soit directement, soit par sa combinaison avec la précédente (18), cette proposition peut rendre des services dans la décomposition d'un polynome en facteurs premiers.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

Lille.

Épreuve écrite. — *Étudier les effets d'une légère surélévation du sol sur une automobile lancée en ligne droite à grande vitesse, dans le cas où la courbe de raccordement entre les deux paliers est à courbure continue et peu prononcée de façon qu'il ne se produise pas de chocs.*

Problème. — I. *Rappeler brièvement comment on établit, au début de la théorie des embrayages par cônes de friction, les relations qui existent entre la poussée du ressort, le couple moteur produit et l'effort moteur total à la jante qui en résulte.*

II. *On donne les éléments suivants d'une automobile :*

Son poids $P = 1500^{kg}$, *dont les* $\frac{3}{5}$ *portent sur l'arrière;*

Le coefficient normal de traction $f_1 = 0,025$;

Le diamètre des roues $2R = 0^m,95$;

Les coefficients de démultiplication en première et en seconde vitesse, $m = 15$, $m' = 8$;

Le rendement de la transmission $\rho = 0,70$;

Le rayon moyen des coins d'embrayage $r = 0^m,15$;

Leur demi-angle au sommet $i = 20°$;

Leur coefficient propre de frottement $f = 0,5$;

Et l'on demande de déterminer :

1° *L'effort de poussée* Q *que doit produire le ressort pour que l'accélération de démarrage en première vitesse soit de* 2^m *par seconde;*

2° *La puissance correspondante du moteur en supposant qu'il tourne à* 1000 *tours à la minute, et que sa vitesse ne varie pas pendant l'embrayage;*

3° *L'adhérence minimum dont on doit disposer pour que les roues motrices ne patinent pas pendant le démarrage;*

4° *L'accélération que l'on obtiendrait si l'on démarrait dans les mêmes conditions sur la seconde vitesse.*

(Juillet 1906.)

CERTIFICAT DE MÉCANIQUE CÉLESTE.

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Dire la forme des développements des éléments canoniques des orbites planétaires que fournit la méthode de Lagrange. Rang d'un terme. Théorèmes sur le rang. Montrer que ces théorèmes découlent simplement des développements purement trigonométriques si l'on admet la possibilité de ces derniers.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère deux planètes se mouvant autour du Soleil. La partie séculaire de la fonction perturbatrice ne contient au second degré les variables excentriques ξ_1, η_1 de la première planète, ξ_3, η_3 de la seconde, que sous la forme*

$$A(\xi_1^2 + \eta_1^2) + 2B(\xi_1\xi_3 + \eta_1\eta_3) + C(\xi_3^2 + \eta_3^2).$$

On néglige les puissances des variables excentriques ou obliques supérieures à la deuxième.

Supposant connus les coefficients A, B, C *et les valeurs* e_0 *et* e'_0 *des excentricités des orbites à un instant donné, on demande de trouver les limites supérieures des valeurs de* e *et* e' *à un instant quelconque.* (Juin 1906.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2047.

(1906, p. 460.)

Soient C_1, C_2, C_3, C_4 *quatre cycles d'un même plan,* D_{ij} *et* D'_{ij} *les tangentes communes aux cycles* C_i *et* C_j.

Si les quatre semi-droites D_{12}, D_{23}, D_{34}, D_{41} *sont tangentes à un même cycle, il en est de même des quatre semi-droites* D'_{12}, D'_{23}, D'_{34}, D'_{41}. (R. B.)

SOLUTION

Par un Abonné.

Les quatre semi-droites D_{12}, D_{23}, ... forment un contour quadrangulaire ABCD; soit M et N, P et Q, R et S, U et V les points de contact de ces semi-droites avec les cycles C_1 et C_2, C_2 et C_3, ... Les quatre semi-droites en question sont tangentes à un même cycle si l'on a

$$(1) \qquad \overline{AB} - \overline{BC} + \overline{CD} - \overline{DA} = 0,$$

ou

$$(\overline{AM} + \overline{MN} + \overline{NB}) - (\overline{BP} + \overline{PQ} + \overline{QC}) + \ldots - \ldots = 0,$$

ce qui se réduit à

$$(2) \qquad \overline{MN} - \overline{PQ} + \overline{RS} - \overline{UV} = 0.$$

En employant les mêmes notations avec des accents pour les quatre autres tangentes communes, on a donc

$$(3) \qquad \overline{M'N'} - \overline{P'Q'} + \ldots = 0,$$

et, par suite,

$$(4) \qquad \overline{A'B'} - \overline{B'C'} + \ldots = 0,$$

ce qui démontre la proposition.

2051.

(1906, p. 480.)

Les angles d'un quadrilatère gauche ont chacun deux bissectrices, l'une intérieure, l'autre extérieure. Quatre bissectrices issues de sommets différents sont sur un même hyperboloïde si le nombre des bissectrices intérieures est pair. (R. B.)

PREMIÈRE SOLUTION

Par M. Parrod.

Considérons les quatre bissectrices intérieures AA', BB', CC' et DD'; elles rencontrent les droites AC et BD joignant

les sommets opposés. Il suffit de montrer que les points A, C, B′, D′ situés sur AC et B, D, A′, C′ situés sur BD appartiennent à deux divisions homographiques. En effet,

$$\frac{B'A}{B'C} = \frac{BA}{BC}, \qquad \frac{D'A}{D'C} = \frac{DA}{DC},$$

$$\frac{A'B}{A'D} = \frac{AB}{AD}, \qquad \frac{C'B}{C'D} = \frac{CB}{CD};$$

donc

$$\frac{B'A}{B'C} : \frac{D'A}{D'C} = \frac{A'B}{A'D} : \frac{C'B}{C'D}.$$

En prenant un nombre impair de bissectrices intérieures, ces deux rapports anharmoniques sont de signes contraires.

Solutions semblables de MM. Laureaux et Letierce.

DEUXIÈME SOLUTION

Par M. Thié.

Appliquons à chaque sommet du quadrilatère deux forces dirigées respectivement suivant les deux côtés qui aboutissent à ce sommet; supposons de plus que les intensités des huit forces ainsi introduites sont toutes égales, et que les forces appliquées à deux sommets consécutifs sont opposées. Le système de forces ainsi constitué est en équilibre. Les deux forces appliquées en un sommet ont leur résultante dirigée suivant l'une des bissectrices de l'angle correspondant du quadrilatère, et le nombre des bissectrices intérieures est pair, comme on le voit aisément. On en conclut que quatre bissectrices issues de sommets différents sont les lignes d'action de quatre forces en équilibre, si le nombre des bissectrices intérieures est pair. Donc, en vertu d'un théorème connu, ces bissectrices appartiennent à un même hyperboloïde.

2052.

(1906, p. 528.)

Soient a, b, c, d des fonctions d'une variable k; a priori *on peut mettre l'expression $\frac{az+b}{cz+d}$ sous la forme $\frac{m'z+n'}{mz+n}k$,*

l'accent indiquant une dérivée ; exprimer la fonction k au moyen des fonctions a, b, c, d et de leurs dérivées.

Application aux deux formes de l'intégrale d'une équation de Riccati :

$$y = \frac{Ca + b}{Cc + d}, \qquad y = \frac{1}{X}\,\frac{C_1 p' + q'}{C_1 p + q}.$$

(*Voir* une Note de M. Raffy, *Nouvelles Annales*, 1902, p. 529). (G. F.).

SOLUTION

Par M. A. Lambert.

1. Les trois fonctions m, n, k doivent satisfaire aux conditions

$$\frac{m'}{n'} = \frac{a}{b}, \qquad \frac{m}{n} = \frac{c}{d}, \qquad k = \frac{b}{d} : \frac{n'}{n} = \frac{bn}{dn'}.$$

En égalant les valeurs de m' fournies par les deux premières égalités, on obtient

$$dn'(ad - bc) = bn(c'd - d'c);$$

on en conclut

$$(1) \qquad k = \frac{ad - bc}{c'd - d'c}.$$

Pour $a = c'$, $b = d'$, on aurait naturellement $k = 1$.

Connaissant k, on aura m et n par les relations

$$k\frac{m'}{m} = \frac{a}{c}, \qquad k\frac{n'}{n} = \frac{b}{d};$$

toutefois, chacune des fonctions m et n ne se trouve ainsi déterminée qu'à un facteur constant près, et l'un de ces facteurs constants doit être choisi d'après l'autre, de manière à satisfaire à la relation $\frac{m}{n} = \frac{c}{d}$.

2. Considérons l'équation de Riccati

$$\frac{dy}{dx} + Xy^2 + X_1 y + X_2 = 0.$$

Si l'on rattache cette équation à l'équation linéaire du premier ordre, on trouve pour y une fonction de la forme

$$(2) \qquad y = \frac{Ca + b}{Cc + d},$$

C étant une constante, a, b, c, d étant des fonctions de x, et, réciproquement, toute fonction de cette forme satisfait à une équation de Riccati. Si l'on rattache cette équation à l'équation linéaire du second ordre, on trouve

$$y = \frac{1}{X}\,\frac{C_1 p' + q'}{C_1 p + q}.$$

Les valeurs correspondantes des constantes C et C_1 étant liées homographiquement, on peut remplacer C_1 par $\frac{C\alpha + \beta}{C\gamma + \delta}$, α, β, γ, δ étant des constantes, et l'on obtient

$$(3) \qquad y = \frac{1}{X}\,\frac{Cm' + n'}{Cm + n},$$

la constante C étant la même que dans (2). On a alors, d'après ce que l'on a vu au début,

$$(4) \qquad X = \frac{c'd - d'c}{ad - bc}.$$

QUESTIONS.

2075. Si, sur chaque ordonnée de la courbe (M) rapportée à des axes rectangulaires, on porte le segment MP égal à la longueur MN de la normale limitée à Ox, et si la normale correspondante à la développée de (M) coupe en H la perpendiculaire élévée en N à Ox, la tangente à la courbe (P) passe par le point de rencontre de la tangente à la courbe (M) et de la perpendiculaire abaissée de N sur MH.

(M. D'OCAGNE.)

[O6p]

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE DU THÉORÈME DE DUPIN RELATIF AUX SYSTÈMES DE TROIS SURFACES QUI SE COUPENT ORTHOGONALEMENT;

PAR M. M. FOUCHÉ,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

Ce théorème fameux n'est pas toujours énoncé avec toute la précision désirable.

Voici la proposition que nous allons démontrer par une méthode presque entièrement géométrique qui ne suppose connues que les propriétés élémentaires des normalies :

Si trois surfaces passant par un même point se coupent mutuellement à angle droit le long de trois arcs finis à partir de leur point commun, et si ce point n'est un point singulier sur aucune des trois surfaces ni sur aucune des trois intersections, ces trois intersections sont respectivement tangentes en leur point commun aux lignes de courbure de chacune des surfaces qui passent par ce point-là.

Pour plus de clarté, je partagerai la démonstration en plusieurs parties.

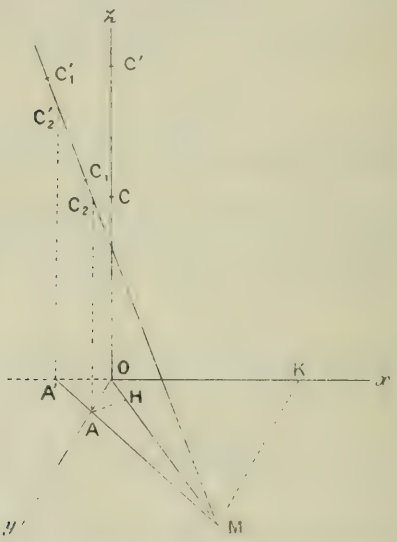
1° *Projection, sur un plan tangent à une surface, de la normale à cette surface en un point infiniment voisin du point de contact du plan tangent considéré.* — Soient (*fig.* 1) :

Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires dirigés, les deux premiers dans le plan tangent au point O tangentiel-

lement aux deux lignes de courbure de la surface, et le troisième Oz suivant la normale à cette surface;

C le centre de courbure de la section normale à la surface tangente à Ox, C' celui de la section normale tangente à Oy;

Fig. 1.



$MC_1C'_1$ la normale au point M, infiniment voisin de O, lequel, aux infiniment petits près du second ordre, peut être supposé dans le plan xOy;

C_1 le centre de courbure principal correspondant au point M qui se trouve sur la même nappe de la développée de la surface que le point C, et C'_1 celui qui se trouve sur la même nappe que C_1.

A cause de la continuité de la surface, les distances CC_1 et $C'C'_1$ sont des infiniment petits du premier ordre. On sait que toutes les normales sont tangentes aux deux nappes de la développée. On sait aussi que

la nappe qui passe en C est tangente au plan yOz, et celle qui passe en C', au plan xOz. Soient encore C_2 le point où la normale en M rencontre le plan yOz, et C'_2 celui où elle rencontre le plan xOz. Puisque la normale MC_1 est tangente en C_1 à une surface tangente au plan yOz en un point C infiniment voisin de C_1, le point C_2 où elle rencontre ce plan tangent sera aussi infiniment voisin de C et de C_1 [1]. De même, le point C'_2 sera infiniment voisin de C' et de C'_1. Il en résulte que les distances MC_2 et MC'_2 ne diffèrent que par des infiniment petits des rayons de courbure principaux en M, et aussi des rayons de courbure principaux en O, puisque O et M sont infiniment voisins. Si l'on désigne ces rayons de courbure par ρ et ρ', on pourra donc poser

$$MC_2 = \rho, \qquad MC_2 = \rho'.$$

Projetons maintenant la normale MC_2 sur le plan xOy. C_2 se projettera en A sur Oy et C'_2 en A' sur Ox, et l'on aura

$$\frac{MA}{MA'} = \frac{MC_2}{MC'_2} = \frac{\rho}{\rho'}.$$

Ainsi : *La projection de la normale en* M *sur le*

---

[1] Soient O un point d'une surface, M un point infiniment voisin, la distance MO étant du premier ordre, m la projection de M sur le plan tangent en O, MS une tangente à la surface au point M qui rencontre en S le plan tangent en O. Mm est un infiniment petit du second ordre, mO du premier. Si l'angle MSm est fini, Sm est aussi du second ordre et SO du premier. Si l'angle MSm est un infiniment petit du premier ordre, la distance Sm est du premier ordre et SO est encore du premier ordre. Si l'angle MSm était d'un ordre supérieur au premier, alors Sm et SO seraient finis; mais alors tous les points de la tangente MS seraient à une distance du plan tangent infiniment petite du second ordre. Ce cas ne saurait se présenter dans notre problème puisque la distance du point M au plan yOz est du premier ordre; l'angle de MC_1 avec le plan yOz est bien du premier ordre, et C_2C_1 est bien un infiniment petit du premier ordre.

plan tangent en O *infiniment voisin de* M *est coupée par les tangentes aux lignes de courbure passant en* O *en deux points qui déterminent sur cette projection, à partir du point* M, *des segments inversement proportionnels aux rayons de courbure principaux correspondant à ces lignes de courbure* ([1]).

Ce théorème permet de construire la projection de la normale en M dès qu'on connaît les directions des lignes de courbure et les rayons principaux en O.

2° *Expression de la torsion géodésique d'une ligne tracée sur une surface.* — La torsion géodésique d'une ligne tracée sur une surface est le quotient, par un arc de cette courbe infiniment petit OM, de l'angle que fait la normale en M à la surface avec le plan normal à la surface en O et tangent en O à la ligne considérée. Il est visible que les lignes de courbure sont caractérisées par une torsion géodésique nulle, puisque la condition nécessaire et suffisante pour que deux normales infiniment voisines se rencontrent est précisément que l'angle qui sert à définir la torsion géodésique soit nul, ou, si l'on aime mieux, du second ordre d'infiniment petit. Au reste, cette condition ressortira avec évidence de l'expression que nous allons trouver.

Il faudrait aussi démontrer la réciprocité de la définition, c'est-à-dire qu'il faudrait montrer que l'angle de la normale en M avec le plan normal en O et tangent en O à OM est le même que l'angle de la normale

---

([1]) M. Lecornu m'a fait observer que cette propriété résultait immédiatement des propriétés de la normale à une conique, et de ce fait que la projection MAA' de la normale sur le plan tangent en O est normale à l'indicatrice de la surface. La démonstration précédente ne suppose connue aucune propriété des coniques.

en O avec le plan normal en M et tangent à MO. Cette réciprocité ressortira aussi de l'expression de la torsion géodésique.

Menons de C_2 sur le plan ZOM la perpendiculaire C_2D qui se projette suivant AH perpendiculaire à OM. L'angle de la normale MC_2 avec le plan normal zOM a pour sinus $\frac{DC_2}{MC_2}$. Comme il est infiniment petit, on peut le confondre avec son sinus et la torsion géodésique τ a pour expression

$$\tau = \frac{1}{OM}\frac{C_2D}{MC_2} = \frac{AH}{OM \times MC_2}.$$

$MC_2 = \rho$. Il faut évaluer AH.

Soit φ l'angle de OM avec Ox. Menons MK parallèle à Oy. Nous aurons successivement

$$AH = OA \cos\varphi,$$

$$MK = OM \sin\varphi,$$

$$\frac{OA}{MK} = \frac{AA'}{MA'} = \frac{C_2C_2'}{MC_2'} = \frac{\rho - \rho'}{\rho'},$$

d'où

$$OA = \frac{\rho - \rho'}{\rho'} OM \sin\varphi,$$

$$AH = OM \frac{\rho - \rho'}{\rho'} \sin\varphi \cos\varphi$$

et

$$\tau = \frac{\rho - \rho'}{\rho\rho'} \sin\varphi \cos\varphi.$$

Il convient de donner un signe à τ suivant que la normale en M est d'un côté ou de l'autre de la section normale en O suivant OM. Sans insister sur les conventions qu'on peut faire à cet égard, on peut admettre que, dans le cas de la figure, τ serait négatif et adopter la formule définitive

$$\tau = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right) \sin\varphi \cos\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right) \sin 2\varphi.$$

Le fait que cette formule ne contient pas les variations de ρ, ρ', φ démontre la réciprocité dont je parlais tout à l'heure, et l'on voit également que τ s'annule seulement pour $\sin\varphi = 0$ et pour $\cos\varphi = 0$, c'est-à-dire pour les deux lignes de courbure, ou plus exactement pour des lignes tangentes aux lignes de courbure, tant qu'on ne considère que le seul point o.

3° Théorème. — *Si deux courbes tracées sur une surface se coupent à angle droit, leurs torsions géodésiques au point d'intersection ont la même valeur absolue et des signes contraires.*

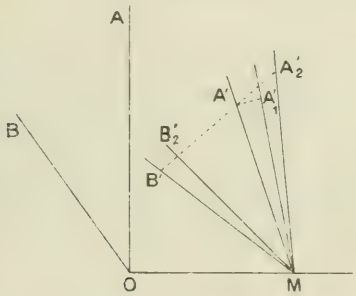
Cela résulte évidemment de la formule précédente, car, si l'on ajoute $\frac{\pi}{2}$ à φ, l'angle 2φ augmente de π et son sinus change de signe sans changer de valeur absolue.

4° Théorème. — *Si deux surfaces se coupent sous un angle constant le long d'une certaine ligne, cette ligne d'intersection a la même torsion géodésique soit qu'on la considère comme tracée sur l'une ou l'autre des deux surfaces.*

La démonstration repose sur ce fait bien connu que, si l'on projette un angle α sur un plan infiniment peu différent du plan de cet angle, la différence entre l'angle α et sa projection est un infiniment petit du second ordre. On peut aussi énoncer cette proposition en disant que la section d'un dièdre par un plan faisant un angle infiniment petit avec le plan perpendiculaire à l'arête du dièdre ne diffère de ce dièdre que d'un infiniment petit du second ordre. Soient (*fig.* 2) OA et OB les normales aux deux surfaces en O; MA′ et MB′ les normales en M, le point M étant supposé sur la tangente

en O à la courbe d'intersection des deux surfaces, à une distance infiniment petite de O. Pour faire voir que les deux torsions géodésiques sont égales, il n'y a pas lieu de tenir compte de l'arc OM qui est le même sur les deux surfaces, et il suffit de montrer que les

Fig. 2.



angles qui servent à définir ces deux torsions sont égaux. Projetons donc la normale MA' sur le plan AOM et soit MA'_1 sa projection.

L'angle dont il s'agit est $A'MA'_1$. Or, le plan de cet angle, perpendiculaire au plan AOM, fait un angle infiniment petit avec le plan A'MB', puisque celui-là, infiniment voisin de AOB, fait avec le plan AOM un angle infiniment peu différent d'un angle droit.

Si MA'_2 est la trace du plan A'MB' sur le plan AOM, l'angle $A'MA'_1$ sera la projection de l'angle $A'MA'_2$, et, par suite, ces deux angles ne diffèrent que d'un infiniment petit du second ordre et peuvent être remplacés l'un par l'autre. On pourra donc prendre pour angle de torsion relatif à la première surface l'angle $A'MA'_2$. De même, l'angle de torsion relatif à la seconde surface sera l'angle $B'MB'_2$ que fait la normale MB' avec la trace du plan A'MB' sur le plan BOM.

D'après le principe déjà invoqué, l'angle $B'_2MA'_2$ ne

diffère de l'angle AOB que d'un infiniment petit du second ordre. Par hypothèse, $A'MB' = AOB$. Donc, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$A'MB' = A'_2MB'_2,$$

ce qui exige que les angles $A'MA'_2$ et $B'MB'_2$ soient égaux, et c'est ce qu'il fallait démontrer.

On remarquera que, si l'une des torsions est nulle, l'autre le sera aussi, de sorte que le théorème actuel comprend comme cas particulier la proposition bien connue d'après laquelle, si deux surfaces se coupent sous un angle constant et si l'intersection est une ligne de courbure sur l'une des deux surfaces, elle est aussi une ligne de courbure sur l'autre surface.

5° Théorème de Dupin. — Soient OA, OB, OC les intersections mutuelles des trois surfaces, et τ, τ_1, τ_2 leurs torsions géodésiques, qui, d'après le théorème précédent, sont indépendantes de la surface sur laquelle on les considère, puisque par hypothèse l'angle de deux surfaces reste droit. Mais, par hypothèse aussi, chacune des lignes OA, OB, OC est perpendiculaire aux deux autres. Donc, d'après ce que nous avons vu au n° 3, on aura

$$\tau + \tau_1 = 0, \qquad \tau_1 + \tau_2 = 0, \qquad \tau_2 + \tau = 0,$$

ce qui exige

$$\tau = \tau_1 = \tau_2 = 0,$$

et les trois lignes OA, OB, OC sont tangentes aux lignes de courbure. C. Q. F. D.

[D2eβ]

SUR LA REDUCTION EN FRACTION CONTINUE CANONIQUE DE LA FONCTION $e^x x^{-\alpha} \int_x^\infty e^{-z} z^{\alpha-1} dz$;

PAR M. H. PADÉ.

1. Cette fonction est une de celles qu'a étudiées Laguerre dans son Mémoire *Sur la réduction en fractions continues d'une fonction qui satisfait à une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les coefficients sont rationnels* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1885; *Œuvres*, t. II); c'est la seule pour laquelle il se soit préoccupé de la question de la convergence, en établissant que la fraction continue est convergente, alors que la série entière en $\frac{1}{x}$, à laquelle conduit le développement de la fonction, est divergente. On retrouvera ici tous les résultats de Laguerre, mais obtenus par une méthode infiniment plus directe et plus simple. J'ai indiqué cette méthode d'un seul mot dans mon Mémoire pour le grand Prix des Sciences mathématiques en 1904, où la question est traitée d'une façon plus large et au point de vue des variables complexes, et aussi dans une Note des *Comptes rendus*, du 11 décembre 1905. Je signalerai, comme se rapportant au même ordre de recherches, l'intéressant travail de M. Nielsen : *Sur le développement en fraction continue de la fonction Q de M. Prym* (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, séance du 21 janvier 1906).

2. Nous prendrons pour point de départ l'inté-

grale

$$(1) \qquad I = \int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^n\,dz}{z^{n+1-\alpha}},$$

où n est un entier positif, x un nombre réel et positif, et où la variable d'intégration z est supposée réelle.

On a

$$\frac{(z-x)^n}{z^{n+1-\alpha}} = z^{\alpha-1} - \frac{n}{1}\,x z^{\alpha-2} + \frac{n(n-1)}{1.2}\,x^2 z^{\alpha-3} - \ldots$$
$$+ (-1)^n \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{1.2\ldots n}\,x^n z^{\alpha-n-1}.$$

Multiplions les deux membres par $e^{-z}\,dz$, puis intégrons entre les limites x et $+\infty$. Si l'on pose

$$(2) \qquad J_p = \int_x^\infty e^{-z} z^{\alpha-p-1}\,dz,$$

on obtient

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} I &= J_0 - \frac{n}{1}\,x J_1 + \frac{n(n-1)}{1.2}\,x^2 J_2 - \ldots \\ &\quad + (-1)^n \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{1.2\ldots n}\,x^n J_n. \end{aligned} \right.$$

Toutes les intégrales $J_1, J_2, \ldots, J_n$ se ramènent à J_0. On a, en effet,

$$z^{\alpha-p-1} = \frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-p)}\,\frac{d^p(z^{\alpha-1})}{dz^p},$$

et, par suite,

$$J_p = \frac{1}{(\alpha-1)\ldots(\alpha-p)}\,\int_x^\infty e^{-z}\,\frac{d^p(z^{\alpha-1})}{dz^p}\,dz.$$

Mais, des intégrations par parties faites successivement donnent

$$\int_x^\infty e^{-z}\,\frac{d^p(z^{\alpha-1})}{dz^p}\,dz = [\Theta_p]_x^\infty + (-1)^p \int_x^\infty z^{\alpha-1}\,\frac{d^p(e^{-z})}{dz^p}\,dz,$$
$$= [\Theta]_x^\infty + J_0,$$

où

$$\Theta_p = e^{-z}\frac{d^{p-1}(z^{\alpha-1})}{dz^{p-1}} + e^{-z}\frac{d^{p-2}(z^{\alpha-1})}{dz^{p-2}} + \ldots + e^{-z}z^{\alpha-1}.$$

Prise entre les limites x et $+\infty$, cette expression devient

$$[\Theta_p]_x^\infty = -e^{-x}[x^{\alpha-1} + (\alpha-1)x^{\alpha-2} + \ldots$$
$$+ (\alpha-1)\ldots(\alpha-p+1)x^{\alpha-p}];$$

et l'on en conclut

$$J_p = \frac{-1}{(\alpha-1)\ldots(\alpha-p)}\{e^{-x}[x^{\alpha-1} + (\alpha-1)x^{\alpha-2} + \ldots$$
$$+ (\alpha-1)\ldots(\alpha-p+1)x^{\alpha-p}] - J_0\}.$$

Le terme en J_p dans (3) est, par suite, la somme de deux autres, savoir :

$$\frac{(-1)^{p+1}}{(\alpha-1)\ldots(\alpha-p)}\,\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}$$
$$\times e^{-x}x^\alpha[x^{p-1} + (\alpha-1)x^{p-2} + \ldots + (\alpha-1)\ldots(\alpha-p+1)],$$

produit de $e^{-x}x^\alpha$ par un polynome de degré $p-1$, et

$$\frac{(-1)^p}{(\alpha-1)\ldots(\alpha-p)}\,\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}\,x^p J_0.$$

Si nous faisons maintenant p successivement égal à $1, 2, \ldots, n$, et que nous ajoutions tous les résultats, puis J_0, nous obtiendrons I sous la forme d'une somme de deux termes dont le premier est le produit de $e^{-x}x^\alpha$ par un polynome de degré $n-1$, et le second le produit de J_0 par le polynome de degré n

$$\frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)}$$
$$\times\left[x^n - (n-\alpha)\frac{n}{1}x^{n-1} + (n-\alpha)(n-\alpha-1)\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2} + \ldots\right.$$
$$\left.+ (n-\alpha)(n-\alpha-1)\ldots(1-\alpha)\right].$$

Soit f_n la quantité entre crochets; on a

$$(4)\quad \mathrm{I} = -e^{-x}x^{\alpha}\frac{\varphi_n}{(1-\alpha)\ldots(n-\alpha)} + \frac{f_n}{(1-\alpha)\ldots(n-\alpha)}\mathrm{J}_0,$$

φ_n désignant un polynome de degré $n-1$; et l'on en conclut

$$(5)\qquad \mathrm{J}_0 = e^{-x}x^{\alpha}\frac{\varphi_n}{f_n} + \frac{(1-\alpha)\ldots(n-\alpha)}{f_n}\mathrm{I},$$

ou, plus explicitement,

$$(5)'\quad \left\{\begin{aligned} &\int_x^{\infty} e^{-z}z^{\alpha-1}\,dz \\ &= e^{-x}x^{\alpha}\frac{\varphi_n}{f_n} + \frac{(1-\alpha)\ldots(n-\alpha)}{f_n}\int_x^{\infty}\frac{e^{-z}(z-x)^n}{z^{n+1-\alpha}}\,dz, \end{aligned}\right.$$

ce qui est la formule du n° 18 du Mémoire de Laguerre.

3. En posant $z = x + t$ dans I, on obtient

$$\mathrm{I} = e^{-x}x^{\alpha}\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}t^n\,dt}{\left(1+\frac{t}{x}\right)^{n+1-\alpha}}.$$

Pour x infini, l'intégrale est égale à $\Gamma(n+1) = n!$ On déduit donc de (5)'

$$\begin{aligned} &e^{x}x^{-\alpha}\int_x^{\infty} e^{-z}z^{\alpha-1}\,dz \\ &= \frac{\varphi_n}{f_n} + \frac{(1-\alpha)\ldots(n-\alpha)}{x^{n+1}f_n}\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}t^n\,dt}{\left(1+\frac{t}{x}\right)^{n+1-\alpha}}, \end{aligned}$$

ce qui montre, puisque le développement suivant les puissances décroissantes de x du second membre commence par le terme

$$(1-\alpha)\ldots(n-\alpha)\frac{n!}{x^{2n+1}},$$

que $\frac{\varphi_n}{f_n}$ est une des réduites de l'une des fractions continues canoniques de la fonction $e^x x^{-\alpha} \int_x^\infty e^{-z} z^{\alpha-1} dz$.

4. Le coefficient de I, dans la formule (5), est l'inverse du polynome

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} & 1 + \frac{1}{1-\alpha}\frac{n}{1}x + \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \ldots \\ & + \frac{1}{(1-\alpha)\ldots(n-\alpha)}\frac{n(n-1)\ldots 2.1}{1.2\ldots n}x^n, \end{aligned} \right.$$

qui grandit indéfiniment, soit par valeurs négatives, soit par valeurs positives, lorsque, x étant supposé positif, n grandit indéfiniment; ce coefficient tend donc vers zéro, et l'on en conclut, pour $x > 0$,

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi_n}{f_n} = e^x x^{-\alpha} \int_x^\infty e^{-z} z^{\alpha-1} dz,$$

ce qui prouve la convergence de la fraction continue canonique considérée.

5. Si l'on cherche à mettre le second membre sous la forme d'une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x, on obtient une série divergente.

En le désignant par y et faisant le changement de variable $z = x + t$, on obtient

$$y = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-t}\left(1 + \frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} dt,$$

d'où l'on conclut que le premier terme de ce développement est $\frac{1}{x}$.

D'un autre côté, y satisfait à l'équation

$$x\frac{dy}{dx} = (x-\alpha)y - 1,$$

et, en posant

$$y = \frac{1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \ldots,$$

on en conclut la relation

$$-pa_p = a_{p+1} - \alpha a_p,$$

ou

$$a_{p+1} = (\alpha - p)a_p,$$

et, par suite,

$$a_n = (\alpha - 1)(\alpha - 2)\ldots(\alpha - n - 1).$$

On a donc

$$(7) \qquad y = \frac{1}{x} + \frac{\alpha - 1}{x^2} + \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{x^3} + \ldots,$$

série divergente quel que soit x.

6. On peut remarquer que

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} y = \frac{1}{x} + \frac{\alpha - 1}{x^2} + \ldots + \frac{(\alpha - 1)\ldots(\alpha - p + 1)}{x^p} \\ + \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2)\ldots(\alpha - p)}{x^p} \\ \times \left[\frac{1}{x} + \frac{\alpha - p - 1}{x^2} + \frac{(\alpha - p - 1)(\alpha - p - 2)}{x^3} + \ldots\right]; \end{aligned} \right.$$

et la série entre crochets a la même forme que celle qui définit y et n'en diffère que par le changement de α en $\alpha - p$. On en conclut la convergence de toute une autre catégorie de fractions continues canoniques associées à la fonction y.

7. Le polynome (6), que nous désignerons par P_n, se réduit aisément à une fonction hypergéométrique ; on voit immédiatement que

$$P_n = \lim_{u = \infty} F\left(-n, u, -\alpha + 1, -\frac{x}{u}\right).$$

La fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ satisfaisant à la relation

$$0 = [\gamma - 2\alpha - (\beta - \alpha)x]F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$
$$+ \alpha(1 - x)F(\alpha - 1, \beta, \gamma, x) - (\gamma - \alpha)F(\alpha - 1, \beta, \gamma, x),$$

on en conclut pour P_n la relation

$$0 = (2n - \alpha + 1 + x)P_n - nP_{n-1} - (n - \alpha + 1)P_{n+1};$$

et, comme

$$P_n = \frac{f_n}{(1 - \alpha)(2 - \alpha)\ldots(n - \alpha)},$$

il s'ensuit que

$$f_{n+1} = (2n - \alpha + 1 + x)f_n - n(n - \alpha)f_{n-1}.$$

Cette relation de récurrence entre dénominateurs de trois réduites consécutives de la fraction continue donne le moyen d'écrire immédiatement cette fraction continue.

8. En opérant de même sur l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, on obtient la formule

$$xf_n + (x - \alpha - 1)f'_n - nf_n = 0.$$

[M²4e]

SUR UNE SURFACE REMARQUABLE DU QUATRIÈME ORDRE;

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

1. Soient A, B deux points fixes dont les coordonnées sont respectivement (a_1, a_2, a_3, a_4) et (b_1, b_2, b_3, b_4), une quadrique dont l'équation est

$$\gamma_x^2 = 0$$

et enfin une droite d'intersection de deux plans

$$\alpha_x = 0, \qquad \beta_x = 0.$$

Je prends un point X de l'espace. Les droites AX, BX rencontrent les plans α, β respectivement aux points A_1, B_1. Je vais rechercher le lieu de X lorsque la droite A_1B_1 est tangente à la quadrique γ.

Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées du point X; les coordonnées des points A_1, B_1 sont respectivement

$$\alpha_x a_i - \alpha_a x_i, \qquad \beta_x b_i - \beta_b x_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Soit $k(\alpha_x a_i - \alpha_a x_i) + k'(\beta_x b_i - \beta_b x_i)$ les coordonnées du point de rencontre de la droite A_1B_1 avec la quadrique; on a l'équation de condition

$$k^2(\alpha_x^2\gamma_a^2 - \gamma_x^2\alpha_a^2) + 2kk'(\gamma_a\alpha_x - \gamma_x\alpha_a)(\gamma_b\beta_x - \gamma_x\beta_b) \\ + k'^2(\gamma_b^2\beta_x^2 - \gamma_x^2\beta_b^2) = 0.$$

Pour que A_1B_1 soit tangente à γ, il faut que les deux racines de cette équation soient égales, c'est-à-dire que l'on ait

$$(\gamma_a\alpha_x - \gamma_x\alpha_a)^2(\gamma_b\beta_x - \gamma_x\beta_b)^2 \\ - (\gamma_b^2\beta_x^2 - \gamma_x^2\beta_b^2)(\alpha_x^2\gamma_a^2 - \gamma_x^2\alpha_a^2) = 0.$$

Le lieu de X est donc une surface du quatrième ordre S_4.

2. Soit π un plan passant par la droite AB. Le lieu des points X contenus dans ce plan est, comme on sait, une quartique ayant un point double en A, un point double en B et un point double sur la droite d (Deruyts, *Mathesis*, 1re série, t. VII, 1887).

Les points A et B sont donc des points doubles et la droite d une droite double de la surface S_4.

Il existe deux plans passant par la droite AB et qui

sont tangents à la quadrique γ; ces plans rencontrent la surface chacun suivant une conique double.

3. Les plans passant par la droite d rencontrent encore la surface S_4 suivant une conique.

Le plan (A, d) et le plan (B, d) rencontrent la surface chacun suivant une conique dégénérée en deux droites et dont le centre est en A ou en B.

Les plans passant par l'une de ces quatre droites rencontrent la surface S_4 suivant une cubique plane; parmi ces cubiques, il y en a quatre qui ont un point double soit en A, soit en B.

4. On peut énoncer la génération de S_4 ainsi : *Le lieu du sommet d'un triangle dont les côtés adjacents passent par des points fixes, dont le côté opposé est tangent à une quadrique et a ses extrémités dans des plans fixes, est une surface du quatrième ordre.*

[T5a]

POTENTIEL D'UNE COURONNE CIRCULAIRE ÉLECTRIQUE DE LARGEUR INFINIMENT MINCE ET DE DENSITÉ SUPERFICIELLE ÉGALE A L'UNITÉ;

PAR M. E. MATHY.

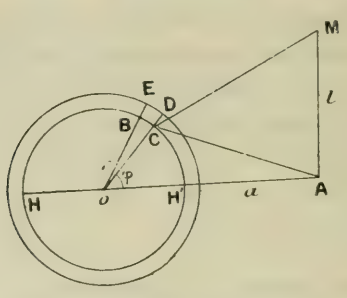
Soient la couronne circulaire de rayon $r = OC$ et de largeur dr, le point M situé en dehors du plan du cercle OC.

De M on abaisse MA perpendiculaire sur le plan de la couronne et l'on joint A au centre du cercle : les longueurs de ces deux droites fixes sont l et a. Dès lors, si l'on trace le secteur d'ouverture infiniment petite

$d\varphi = \mathrm{BOC}$, φ désignant l'angle COA, ce secteur découpera sur la couronne l'élément de surface

$$\mathrm{BCDE} = r\,d\varphi\,dr;$$

la distance du point M au centre de gravité de cette



surface peut être prise égale à MC; comme la densité de la couche est 1, la masse comprise sous cet élément sera $r\,d\varphi\,dr$; donc, le potentiel élémentaire en M sera

$$\frac{r\,d\varphi\,dr}{\mathrm{MC}}.$$

Le potentiel de la couronne sera donc

$$(1)\quad \mathrm{V} = 2\int_0^{\pi} \frac{r\,d\varphi\,dr}{\mathrm{MC}} = 2\int_0^{\pi} \frac{r\,d\varphi\,dr}{\sqrt{l^2 + a^2 + r^2 - 2ar\cos\varphi}}.$$

Or, la couronne étant circulaire, r et dr sont constants :

$$\mathrm{V} = 2r\,dr\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{l^2 + a^2 + r^2 - 2ar\cos\varphi}}.$$

Mais on peut écrire :

$$\mathrm{V} = 4r\,dr\int_0^{\pi} \frac{-d\left(90^\circ - \frac{1}{2}\varphi\right)}{\sqrt{l^2 - (a+r)^2 - 4ar\sin^2\left(90^\circ - \frac{1}{2}\varphi\right)}}$$

$$= \frac{4r\,dr}{\sqrt{l^2 + (a+r)^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}}$$

lorsque

$$\psi = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi \qquad \text{et} \qquad k^2 = \frac{4ar}{l^2 - (a-r)^2}.$$

On reconnaît sous cette forme que

$$(2) \qquad V = \frac{4r\,dr\,K}{\sqrt{l^2 + (a+r)^2}}.$$

De ce que k^2 est plus petit que 1, il est possible de calculer V à l'aide des Tables de Legendre; d'ailleurs $\sqrt{l^2 + (a+2)^2}$ n'est autre que la droite MH, H étant l'extrémité du diamètre passant par A.

Composante suivant MA *de l'attraction de cette couronne.*

On sait que l'attraction suivant MA ou l est donnée par

$$(3) \qquad -A = \frac{dV}{dl}.$$

En vertu de (2)

$$-A = \frac{d}{dl}\,\frac{4r\,dr\,K}{\sqrt{l^2 - (a-r)^2}}.$$

En effectuant, on trouve

$$(4) \qquad -A = \frac{-4lr\,dr\,K}{[l^2 - (a-r)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{4r\,dr}{\sqrt{l^2 - (a-r)^2}}\,\frac{dK}{dl}.$$

Pour obtenir $\frac{dK}{dl}$, il faut remarquer que K est fonction de son module k^2, lequel est à son tour fonction

de l; on aura ainsi

$$(5) \qquad \frac{d\mathrm{K}}{dl} = \frac{d\mathrm{K}}{d(k^2)} \frac{d(k^2)}{dl}.$$

Or $\frac{d\mathrm{K}}{d(k^2)}$ est une formule classique

$$\frac{d\mathrm{K}}{d(k^2)} = \frac{\mathrm{E}}{2k^2(1-k^2)} - \frac{\mathrm{K}}{2k^2}.$$

Appliquée au cas particulier de $k^2 = \frac{4ar}{l^2+(a+r)^2}$, elle donne

$$(6) \qquad \frac{d\mathrm{K}}{d(k^2)} = \frac{\mathrm{E}[l^2+(a+r)^2]^2}{8ar[d^2+(a-r)^2]} - \frac{\mathrm{K}[l^2+(a+r)^2]}{8ar}.$$

Comme

$$(7) \qquad \frac{d(k^2)}{dl} = \frac{d}{dl} : \frac{4ar}{l^2+(a+r)^2} = \frac{-8arl}{[l^2+(a+r)^2]^2},$$

on aura pour (5)

$$(8) \qquad \frac{d\mathrm{K}}{dl} = \frac{-l\mathrm{E}}{[d^2+(a-r)^2]} + \frac{\mathrm{K}l}{[l^2+(a+r)^2]}.$$

Enfin, cette expression de $\frac{d\mathrm{K}}{dl}$ reportée dans (4) fournira la valeur de $-\mathrm{A}$

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} -\mathrm{A} = \frac{-4lrdr\mathrm{K}}{[l^2+(a+r)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{4rldr\mathrm{E}}{\sqrt{l^2+(a+r)^2}[l^2+(a-r)^2]} \\ + \frac{4lrdr\mathrm{K}}{[l^2+(a+r)^2]^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \right.$$

$$(10) \qquad \mathrm{A} = \frac{4rdrl\mathrm{E}}{\sqrt{l^2+(a+r)^2}[l^2+(a-r)^2]}.$$

Le module de E est k^2; sa valeur est donnée par les Tables de Legendre comme celle de K: en outre $[l^2+(a-r)^2]$ est le carré de la droite MH'.

Calcul direct de A.

Cette valeur de A sera exprimée par

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} A &= 2\int_0^{\pi} \frac{r\,d\varphi\,dr}{\overline{MC}^2}\cos CMA \\ &= 2\int_0^{\pi} \frac{r\,d\varphi\,dr\,l}{(l^2-a^2+r^2-2ar\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}\right.$$

Pour obtenir la valeur de cette intégrale, on se sert des signes de Weierstrass. D'abord A peut se mettre sous la forme

$$(12)\quad A = \frac{2r\,dr\,l}{(l^2-a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\left(1-\dfrac{2ar}{l^2-a^2+r^2}\cos\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

On pose

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{2ar}{l^2-a^2+r^2} &= h, \\ \cos\varphi &= u; \end{aligned}\right.$$

d'où

$$d\varphi = \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}};$$

les limites 0 et π de φ correspondent pour u aux limites 1 et -1. Avec ces nouvelles quantités, on aura successivement

$$A = \frac{2r\,dr\,l}{(l^2-a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\int_{-1}^{+1} \frac{du}{(1-hu)\sqrt{(u^2-1)(hu-1)}},$$

$$(14)\quad A = \frac{2r\,dr\,l}{(2ar)^{\frac{3}{2}}}\int_{+1}^{-1} \frac{du}{\left(u-\dfrac{1}{h}\right)\sqrt{(u^2-1)\left(u-\dfrac{1}{h}\right)}}.$$

Les racines du polynome sous le radical étant $\frac{1}{h}$,

1, — 1; afin d'annuler le coefficient du second terme, on pose

$$(15) \qquad u = pv + \frac{1}{3h}.$$

Il en résulte que les racines sont

$$(16) \qquad e_1 = \frac{2}{3h}, \qquad e_2 = 1 - \frac{1}{3h}, \qquad e_3 = -1 - \frac{1}{3h}:$$

et les limites de l'intégration deviennent e_2 et e_3.

Dès lors (14) prend la forme

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{2r\,dr\,l}{(2ar)^{\frac{2}{3}}} \int_{e_2}^{e_3} \frac{p'v\,dv}{(pv - e_1)\sqrt{(pv - e_1)(pv - e_2)(pv - e_3)}} \\ &= \frac{4r\,dr\,l}{(2ar)^{\frac{3}{2}}} \int_{e_3}^{e_2} \frac{dv}{pv - e_1}. \end{aligned} \right.$$

Or, de la formule

$$p(v + \omega_1) - e_1 = \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{pv - e_1},$$

on conclut

$$A = \frac{4r\,dr\,l}{(2ar)^{\frac{3}{2}}(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} \int_{e_3}^{e_2} [p(v + \omega_1) - e_1]\,dv,$$

$$A = \frac{-4r\,dr\,l}{(2ar)^{\frac{3}{2}}(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} [(u + \omega_1) + e_1 v]_{e_3}^{e_2},$$

$$A = \frac{-4r\,dr\,l}{(2ar)^{\frac{3}{2}}(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} [\eta + e_1 \omega].$$

Enfin, de ce que

$$\eta + e_1 \omega = E\sqrt{e_1 - e_3},$$

$$(18) \qquad A = \frac{-4r\,dr\,l\,E}{(2ar)^{\frac{3}{2}}(e_1 - e_2)\sqrt{e_1 - e_3}}.$$

Des formules (16) on déduit

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{4ar}{l^2 + (a+r)^2},$$

$$e_1 - e_3 = \frac{l^2 + (a+r)^2}{2ar}, \qquad e_1 - e_2 = \frac{l^2 + (a-r)^2}{2ar};$$

d'où

$$(19) \qquad A = \frac{-4r\,dr\,l\,E}{\sqrt{l^2 - (a+r)^2}\,[l^2 + (a-r)^2]}.$$

Le signe — indiquant une répulsion, les expressions (19) et (10) concordent.

[F2d]

DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES DE LA FONCTION DOUBLEMENT PÉRIODIQUE DE SECONDE ESPÈCE AYANT UN INFINI D'ORDRE n. FORMATION DES COEFFICIENTS;

PAR M. E. MATHY.

Pour résoudre la question, il faut établir le lemme suivant :

LEMME. — *Les coefficients du développement de* $\frac{\sigma(u-a)}{-\sigma a}$ *suivant les puissances de u sont des polynomes entiers en* ζ, p *et* $p^{(n)}$.

En effet, la fonction $\sigma(u-a)$ est holomorphe et impaire; donc

$$(1) \quad \begin{cases} \sigma(u-a) = -\sigma a + u\sigma' a - \frac{u^2}{1.2}\sigma'' a + \frac{u^3}{1.2.3}\sigma''' a - \ldots, \\ \sigma(u-a) = -\sigma a\left(1 - u\frac{\sigma' a}{\sigma b} + \frac{u^2}{1.2}\frac{\sigma'' a}{\sigma a} - \frac{u^3}{1.2.3}\frac{\sigma''' a}{\sigma a} + \ldots\right). \end{cases}$$

Par définition

$$(2) \qquad \frac{\sigma' a}{\sigma a} = \zeta a.$$

En dérivant, on trouve

$$(2') \qquad \frac{\sigma'' a}{\sigma a} - \left(\frac{\sigma' a}{\sigma a}\right)^2 = -pa;$$

d'où

$$\frac{\sigma'' a}{\sigma a} = \overline{\zeta a}^2 - pa.$$

De même

$$\frac{\sigma''' a}{\sigma a} - \frac{\sigma'' a}{\sigma a}\,\frac{\sigma' a}{\sigma a} = -2\zeta a\, pa - p' a.$$

On en déduit

$$(3) \qquad \frac{\sigma''' a}{\sigma a} = \overline{\zeta a}^3 - 3\zeta a\, pa - p' a.$$

Mais on peut écrire

$$\frac{d}{da} : \frac{\sigma'' a}{\sigma a} = \frac{\sigma''' a}{\sigma a} - \frac{\sigma'' a}{\sigma a}\,\zeta a,$$

pour en conclure

$$(4) \qquad \frac{\sigma''' a}{\sigma a} = \frac{\sigma'' a}{\sigma a}\,\zeta a + \frac{d}{da} : \frac{\sigma'' a}{\sigma a}.$$

D'une façon générale

$$(5) \qquad \frac{\sigma^{(n)} a}{\sigma a} = \frac{\sigma^{(n-1)} a}{\sigma a}\,\zeta a + \frac{d}{da} : \frac{\sigma^{(n-1)} a}{\sigma a}.$$

Cette égalité jointe à (2) démontre le lemme et donne la loi de formation des coefficients de (1); il suffit de faire (n) successivement égal à 2, 3, 4, ...

Le développement sera

$$(6) \quad \frac{\sigma(u-a)}{-\sigma a} = 1 + \sum_1^\infty (-1)^n \frac{u^n}{n!}\left[\frac{\sigma^{(n-1)} a}{\sigma a}\,\zeta a + \frac{d}{da} : \frac{\sigma^{(n-1)} a}{\sigma a}\right].$$

Problème. — *Soit la fonction* $F(u)$ *doublement périodique de seconde espèce ayant un infini d'ordre* n; *sa forme générale est*

$$(7)\qquad F(u) = \frac{\sigma(u-a_1)\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_n)}{(-1)^n\sigma a_1\sigma a_2\ldots\sigma a_n(\sigma u)^n}\,e^{\rho u}.$$

La formule de décomposition est

$$(8)\quad F(u) = \varphi^{(n-1)}u + A_1\varphi^{n-2}u + A_2\varphi^{n-3}u + \ldots + A_{n-1}\varphi(u),$$

l'élément simple

$$\varphi(u) = \frac{\sigma(u-a_1-a_2\ldots a_n)}{-\sigma(a_1+a_2+\ldots+a_n)\sigma u}\,e^{\rho u}.$$

Les développements de $e^{\rho u}$ et de $(\sigma u)^{-n}$ sont connus; comme l'expression (6) fournit les développements des n fonctions $\sigma(u-a_n)$, on peut calculer d'une façon explicite les coefficients $A_{n-1}, \ldots, A_2, A_1$, de la formule (8); on sait qu'ils sont respectivement les coefficients des puissances négatives de u de n à 1 dans le produit des $(n+2)$ fonctions qui forment $F(u)$.

Application $(n = 3)$.

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} F(u) &= \frac{\sigma(u-a_1)\sigma(u-a_2)\sigma(u-a_3)}{-\sigma a_1\sigma a_2\sigma a_3(\sigma u)^3}\,e^{\rho u} \\ &= \varphi''u + A_1\varphi'u + A_2\varphi u, \\ \varphi u &= \frac{\sigma(u-a_1-a_2-a_3)}{-\sigma(a_1+a_2+a_3)\sigma u}\,e^{\rho u}. \end{aligned}\right.$$

En formant les développements on trouve

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} F(u) &= \varphi''u + \left(\rho - \sum_1^3 \zeta a_n\right)\varphi'u \\ &\quad + \frac{1}{1.2}\left[\left(\rho - \sum_1^3 \zeta a_n\right)^2 - \sum_1^3 pa_n\right]\varphi u. \end{aligned}\right.$$

Si

$$\rho = \sum_{1}^{3} \zeta a_n,$$

on retrouve une forme classique

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} F(u) &= \frac{\sigma(u-a_1)\,\sigma(u-a_2)\,\sigma(u-a_3)}{-\sigma a_1\,\sigma a_2\,\sigma a_3\,(\sigma u)^3}\, e^{(\zeta a_1+\zeta a_2+\zeta a_3)u} \\ &= \varphi'' u - \frac{1}{1.2}(pa_1+pa_2+pa_3)\,\varphi u, \\ \varphi u &= \frac{\sigma(u-a_1-a_2-a_3)}{-\sigma(a_1+a_2+a_3)\,\sigma u}\, e^{(\zeta a_1+\zeta a_2+\zeta a_3)u}. \end{aligned} \right.$$

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1907. COMPOSITION D'ALGÈBRE ET DE TRIGONOMÉTRIE.

Solution par M. Jean SERVAIS.

I. *Soient $f(\theta)$ et $\varphi(\theta)$ deux fonctions de la variable indépendante θ, et soient $f'(\theta)$ et $\varphi'(\theta)$ leurs dérivées. On pose*

$$x = f(\theta) - \varphi'(\theta), \qquad y = \varphi(\theta) + f'(\theta),$$
$$X = f' \sin\theta - \varphi'(\theta)\cos\theta,$$
$$Y = f' \cos\theta + \varphi'(\theta)\sin\theta.$$

Démontrer que l'on a identiquement

$$dx^2 + dy^3 = dX^2 + dY^2.$$

II. *Former l'équation du troisième degré qui admet pour racines les longueurs des côtés d'un triangle, connaissant le périmètre $2p$, la somme des trois hauteurs $2h$ et l'aire S du triangle.*

Application numérique : *Calculer les trois côtés en supposant* $2p = 16^{m}$, $2h = 13^{m},60$, $S = 12^{m^2}$.

III. *On donne quatre quantités a, b, c, d réelles et différentes entre elles. Soit*

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

1° *Déterminer une fonction $\varphi_1(x)$, polynome du troisième degré, telle qu'on ait*

$$\varphi_1(a) = b, \qquad \varphi_1(b) = c, \qquad \varphi_1(c) = d, \qquad \varphi_1(d) = a.$$

2° *Si l'on permute, dans $\varphi_1(x)$, a, b, c, d de toutes les manières possibles, on trouve six fonctions différentes : $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$, $\varphi_5(x)$, $\varphi_6(x)$. Soient $F(x)$ la somme de ces six fonctions et*

$$G(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^3 F(x) :$$

former la fonction $G(x)$ et étudier la variation de cette fonction.

3° *Déterminer les deux intégrales indéfinies*

$$\int G(x)\,dx, \qquad \int \frac{dx}{G(x)}.$$

I. La première question est un simple exercice de calcul, sans difficultés, car on a

$$dX = \quad dx\cos\theta - dy\sin\theta,$$
$$dY = -dx\sin\theta + dy\cos\theta.$$

II. Soit

$$f(x) = x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma$$

le polynome cherché. D'après l'énoncé, on a

$$\alpha = 2p,$$
$$S\frac{\beta}{\gamma} = h,$$
$$S^2 = p\,f(p) = p(p^3 - \alpha p^2 + \beta p - \gamma).$$

On en tire les valeurs de β et γ :

$$\beta = \frac{(S^2 + p^4)h}{(hp - S)p},$$
$$\gamma = \frac{(S^2 + p^4)S}{(hp - S)p}.$$

Dans l'exemple numérique, les valeurs des coefficients sont

$$\alpha = 16, \qquad \beta = 85, \qquad \gamma = 150.$$

L'équation

$$x^3 - 16x^2 + 85x - 150 = 0$$

se résout en cherchant ses racines entières, et l'on trouve qu'elle admet pour racines 5, 5 et 6.

Le triangle est donc isoscèle : la base a 6^m et les deux côtés égaux chacun 5^m.

III. 1° La formule d'interpolation de Lagrange donne de suite

$$\varphi_1(x) = \sum \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} b,$$

les divers termes de Σ se déduisant de celui qui est écrit par permutation circulaire des lettres a, b, c, d.

2° A chaque permutation des lettres a, b, c, d correspond un polynome ; mais quatre permutations, se déduisant les unes des autres par permutations circulaires des lettres, fournissent le même polynome φ. Il y a donc seulement $\frac{24}{4} = 6$ polynomes distincts, pour lesquels

$$\varphi_1(a) = b, \qquad \varphi_2(a) = b, \qquad \varphi_3(a) = c, \qquad \varphi_4(a) = c,$$
$$\varphi\ (a) = d, \qquad \varphi_6(a) = d.$$

On a alors

$$F(x) = 2\sum \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}(b+c+d).$$

Posons

$$f(x) = x^4 - s_1x^3 + s_2x^2 - s_3x + s_4;$$

on a, puisque $b+c+d = s_1 - a$,

$$F(x) = 2F_1(x) - 2F_2(x),$$

avec

$$F_1(x) = \sum \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}s_1,$$

$$F_2(x) = \sum \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}a.$$

On voit ainsi que $F_1(x)$ est le polynome, du troisième degré au plus, qui, pour les quatre valeurs a, b, c, d de x, prend la même valeur s_1 : on a donc, identiquement,

$$F_1(x) = s_1.$$

De même, $F_2(x)$ est le polynome, du troisième degré au plus, qui, pour les valeurs a, b, c, d de x, prend respectivement les valeurs a, b, c, d; on a donc évidemment

$$F_2(x) = x.$$

On en conclut

$$F(x) = 2s_1 - 2x$$

et

$$G(x) = s_2x^2 - s_3x - s_4.$$

Ce polynome $G(x)$ est minimum pour

$$x = \frac{s_3}{2s_2}.$$

3° On a immédiatement

$$\int G(x)\,dx = \frac{1}{3}s_2x^3 - \frac{1}{2}s_3x^2 + s_4x + \text{const.}$$

La valeur de l'intégrale $\int \frac{dx}{G(x)}$ dépend de la réalité des racines de $G(x)$.

Si l'on a $s_3^2 - 4s_2s_4 > 0$, désignons par α et β les racines réelles de $G(x)$. On a alors

$$\int \frac{dx}{G(x)} = \frac{1}{s_2(\alpha-\beta)}\log\frac{x-\alpha}{x-\beta} + \text{const.}$$

Si $s_3^2 - 4s_2s_4 < 0$, on a

$$\int \frac{dx}{G(x)} = \frac{2}{\sqrt{4s_2s_4 - s_3^2}}\,\text{arc tang}\frac{2s_2x - s_3}{\sqrt{4s_2s_4 - s_3^2}} + \text{const.}$$

Enfin, si $s_3^2 - 4s_2s_4 = 0$, on a

$$\int \frac{dx}{G(x)} = \frac{2}{s_3 - 2s_2x} + \text{const.}$$

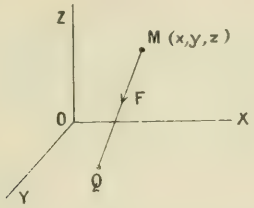
Il est d'ailleurs facile de voir que ces trois cas sont possibles, car, quand les a, b, c, d sont égaux (ou presque égaux), les racines de $G(x)$ sont imaginaires, et, quand $s_2 = 0$, ces racines sont réelles.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1907. COMPOSITION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ET MÉCANIQUE.

SOLUTION PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

On considère trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz. *A tout point* $M(x, y, z)$ *de l'espace on fait correspondre le point* Q *de coor-*

données $\frac{a^2 x}{x^2+y^2}$, $\frac{a^2 y}{x^2+y^2}$, 0; *a étant une constante. Le point* M, *dont on suppose la masse égale à l'unité, est sollicité par une force* MF, *dirigée sui-*



vant MQ (*et dans le sens* MQ), *et dont la grandeur absolue est égale au produit de* MQ *par un coefficient donné,* K^2.

1° *Évaluer les projections de la force* MF *sur les axes* Ox, Oy, Oz.

2° *Dans le champ de forces ainsi défini, déterminer les surfaces de niveau et les lignes de force.*

3° *Le point* M *se mouvant sous l'action de la force* MF, *chercher le mouvement de sa projection* M' *sur* Oz.

4° *On fera voir que l'on peut disposer des conditions initiales du mouvement du point* M, *de façon que la trajectoire de ce point se projette sur le plan des* xy *suivant un cercle donné, de centre* O, *et de rayon* R *supérieur à* a. *Exprimer, dans ce cas, les coordonnées du point* M *en fonction du temps. Tâcher d'interpréter cinématiquement ce mouvement.*

5° *En supposant toujours remplies les conditions initiales dont il s'agit au* 4°, *démontrer que la trajectoire du point* M *est une courbe algébrique si le*

rapport $\frac{R^2 - a^2}{R^2}$ *est le carré d'un nombre rationnel.*

1. Les projections de la force MF s'écrivent immédiatement

$$(1)\qquad \begin{cases} X = K^2\left(\dfrac{a^2 x}{x^2+y^2} - x\right), \\ Y = K^2\left(\dfrac{a^2 y}{x^2+y^2} - y\right), \\ Z = -K^2 z. \end{cases}$$

2. On en déduit, pour le travail élémentaire de la force,

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = K^2\left[\frac{a^2(x\,dx + y\,dy)}{x^2+y^2} - x\,dx - y\,dy - z\,dz\right] = dU,$$

si l'on pose

$$U = \frac{K^2}{2}\left[a^2 \log(x^2+y^2) - (x^2+y^2+z^2)\right]$$

(log désignant un logarithme népérien). Les surfaces de niveau sont donc données par

$$(2)\qquad a^2 \log(x^2+y^2) - (x^2+y^2+z^2) = \lambda,$$

λ étant une constante arbitraire. Ce sont des surfaces de révolution autour de Oz. Pour étudier leurs méridiennes, coupons-les par le plan $y = 0$, ce qui donne

$$z = \pm\sqrt{2a^2 \log x - x^2 - \lambda}.$$

La fonction φ sous le radical part de $-\infty$ (asymptotiquement à Oy) pour revenir à $-\infty$ après avoir atteint un maximum correspondant à la racine unique de la dérivée, $x = a$, maximum donné par

$$m = a^2(2\log a - 1) - \lambda.$$

On n'aura donc de valeurs réelles pour z qu'autant que m sera positif, ce qui exige

$$\lambda < a^2(2\log a - 1).$$

Pour une telle valeur de λ, la fonction φ s'annule pour deux valeurs, x_1 et x_2, comprenant la valeur a; dans cet intervalle, on a, pour chaque valeur de x, deux valeurs de z égales et de signe contraire; la méridienne est une courbe fermée de forme ovale, et la surface de niveau une sorte de tore déformé tout en restant de révolution.

Les lignes de force, trajectoires orthogonales des surfaces de niveau, sont définies par les équations différentielles

$$\frac{(x^2+y^2)\,dx}{x(x^2+y^2-a^2)} = \frac{(x^2+y^2)\,dy}{y(x^2+y^2-a^2)} = \frac{dz}{z}.$$

Les deux premiers rapports donnent d'abord

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y},$$

dont l'intégrale est

$$y = \mu x. \tag{3}$$

Il était d'ailleurs évident *a priori*, puisque les surfaces de niveau sont de révolution autour de Oz, que les lignes de force devaient se trouver dans des plans passant par cet axe. Si maintenant on additionne terme à terme les deux premiers rapports, après les avoir multipliés respectivement par x et y, on a

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2-a^2} = \frac{dz}{z},$$

dont l'intégrale est

$$x^2 + y^2 - a^2 = \nu z^2, \tag{4}$$

équation générale des quadriques de révolution ayant pour équateur, dans le plan Oxy, le cercle

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

3. L'équation différentielle du mouvement de la projection M′ du point M sur Oz est, d'après la troisième équation (1),

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -K^2 z,$$

dont, ainsi qu'il est bien connu, l'intégrale est

$$z = A \cos Kt + B \sin Kt, \tag{5}$$

qui définit un mouvement vibratoire simple (question de cours).

4. Le mouvement de la projection m du point M sur Oxy est régi par les deux premières équations (1) qui montrent d'abord que

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y},$$

c'est-à-dire que la force est centrale.

Il en résulte que le mouvement du point m est défini, en coordonnées polaires (r, θ), par les deux équations

$$\left\{ \begin{aligned} & r^2 \frac{d\theta}{dt} = C, \\ & \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{K^2(a^2 - r^2)}{r}, \end{aligned} \right. \tag{6}$$

et, par suite, son mouvement sur le rayon vecteur par

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{C^2}{r^3} = \frac{K^2(a^2 - r^2)}{r}. \tag{7}$$

Pour que le point m décrive le cercle, il faut que,

placé d'abord sur ce cercle, il soit lancé perpendiculairement au rayon, ce qui donne les conditions initiales

$$r = R, \qquad r\frac{d\theta}{dt} = c, \qquad \frac{dr}{dt} = 0,$$

d'où

$$C = Rc,$$

et l'équation (7) devient

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{R^2 c^2}{r^3} = \frac{K^2(a^2 - r^2)}{r}.$$

Il faut maintenant, et il suffit, que cette équation admette l'intégrale $r = R$, ce qui donne

$$c = K\sqrt{R^2 - a^2},$$

valeur réelle pour $R > a$, dont le signe dépend du sens arbitraire attribué au mouvement.

En résumé : *les conditions initiales nécessaires et suffisantes sont*

$$r = R, \qquad c = K\sqrt{R^2 - a^2},$$

la vitesse c étant d'ailleurs perpendiculaire au rayon.

De

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{R}$$

on tire ensuite, par un choix convenable de l'origine des temps,

$$\theta = \frac{c}{R}t,$$

et, par conséquent,

$$(8) \qquad \begin{cases} x = R\cos\dfrac{K\sqrt{R^2 - a^2}}{R}t, \\ y = R\sin\dfrac{K\sqrt{R^2 - a^2}}{R}t. \end{cases}$$

Le mouvement dans l'espace du point M, défini par les équations (5) et (8), peut dès lors être engendré comme suit : le point M est animé d'un mouvement vibratoire simple sur une parallèle à Oz douée d'un mouvement de rotation uniforme autour de cet axe. Autrement dit : la trajectoire est une courbe cylindrique de Lissajous. Il est bien connu qu'une telle courbe se ferme et, par suite, est algébrique si le rapport des périodes des deux mouvements, ici égal à $\frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R}$, est rationnel. On peut, au surplus, le démontrer comme suit.

5. Si $\frac{R^2 - a^2}{R^2}$ est le carré d'un nombre rationnel $\frac{p}{q}$ (p et q étant premiers entre eux, et d'ailleurs $p < q$) et si l'on pose

$$\frac{Kt}{q} = \theta,$$

les coordonnées (5) et (7) du point mobile s'écrivent

$$\begin{aligned} x &= R \cos p\theta, \\ y &= R \sin p\theta, \\ z &= A \cos q\theta + B \sin q\theta. \end{aligned}$$

Or on sait, d'une manière générale, que, si l'on pose $\cos\theta = u$, on a

$$\cos m\theta = f_m(u), \qquad \sin m\theta = \sqrt{1 - u^2}\, \varphi_{m-1}(u),$$

$f_m(u)$ et $\varphi_{m-1}(u)$ étant des polynomes entiers, de degrés respectifs m et $m - 1$ en u. Les coordonnées x, y, z s'expriment donc algébriquement en fonction du paramètre u, et la courbe qu'elles définissent est dès lors algébrique. D'ailleurs, les u des points où cette courbe rencontre un plan quelconque,

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0,$$

sont donnés par l'équation

$$\alpha R f_p(u) + \beta R\sqrt{1-u^2}\,\varphi_{p-1}(u)$$
$$- \gamma A f_q(u) + \gamma B\sqrt{1-u^2}\,\varphi_{q-1}(u) - \delta = 0,$$

ou

$$[\alpha R f_p(u) - \gamma A f_q(u) + \delta]^2$$
$$= (1-u^2)[\beta R\varphi_{p-1}(u) + \gamma B\varphi_{q-1}(u)]^2,$$

dont le degré est égal à $2q$ (puisque $q > p$); tel est donc l'ordre de la trajectoire ainsi obtenue.

En particulier, si $p = q = 1$, la trajectoire est une conique; c'est d'ailleurs la section du cylindre

$$x^2 + y^2 = R^2$$

par le plan

$$z = Ax + By.$$

Et, en effet, si $\frac{R^2 - a^2}{R^2} = 1$, il vient $a = 0$; autrement dit, le point Q de l'énoncé se confond constamment avec O, et la force qui sollicite le point M est une force attractive issue de O et proportionnelle à la distance OM. Il est bien connu qu'en pareil cas la trajectoire est une ellipse de centre O.

BIBLIOGRAPHIE.

Balistique extérieure rationnelle (Problème balistique principal), par le Commandant *P. Charbonnier*. — 1 vol. in-18 jésus de 492 pages avec 76 figures dans le texte. Prix : 5fr. Paris, Octave Doin, 1907.

Ce volume appartient à la *Bibliothèque de Mécanique appliquée et Génie*, dirigée par M. M. d'Ocagne, et qui fait elle-même partie de la vaste *Encyclopédie scientifique*, publiée sous la direction du Dr Toulouse.

Le *Problème balistique principal*, dont il est exclusivement question dans le livre du Commandant Charbonnier, consiste dans l'étude du mouvement d'un projectile à la surface de la Terre, en tenant compte de la résistance de l'air, mais en négligeant les petites perturbations dues par exemple à la courbure de la Terre, aux variations de la gravité avec la latitude et l'altitude, à la rotation de la Terre, à l'existence du vent atmosphérique, à la rotation du projectile autour de son axe. L'examen de ces diverses influences constitue les *Problèmes balistiques secondaires*, dont l'étude est renvoyée à un autre Volume. Le problème balistique principal s'énonce donc ainsi :

Étudier le mouvement d'un point matériel pesant, dans un milieu en repos, de densité constante, qui lui oppose une résistance tangentielle, fonction de la vitesse. La terre est supposée plane et immobile; la gravité est constante en grandeur et en direction.

L'Ouvrage est divisé en cinq Livres, consacrés respectivement aux *Cas limites du problème balistique*, aux *Propriétés générales des trajectoires atmosphériques*, à la *Résistance monome*, au *Tir de plein fouet*, aux *Trois séries balistiques*.

Il m'est impossible d'analyser ici en détail cet excellent exposé, dans lequel l'auteur a coordonné les travaux les plus récents des balisticiens, parmi lesquels les siens propres occupent une place très distinguée. Tous les spécialistes le consulteront avec le plus grand profit. Mais l'Ouvrage, malgré son caractère très technique, est de nature à intéresser une partie plus étendue du public, et c'est un point sur lequel je voudrais attirer particulièrement l'attention. Il semblerait, à lire certains Ouvrages destinés à l'enseignement, qu'un problème de Mécanique est résolu quand on a écrit les équations différentielles qui le traduisent. Les quelques problèmes que l'on y traite jusqu'au bout sont en général artificiels et posés avec le souci unique d'obtenir des équations auxquelles s'appliquent les procédés de l'Analyse élémentaire. Mais la nature pose des problèmes d'un autre genre. Elle n'a point de sollicitude pour les mathématiciens et les équations différentielles qu'elle leur fait écrire ne se ramènent que rarement à des quadratures. A eux de tirer parti de ces équations *en dehors du pro-*

gramme et d'inventer les procédés qui leur permettront d'aller jusqu'aux calculs numériques.

La Mécanique céleste nous offre le plus bel exemple de ce que peut l'Analyse en présence de ces questions ardues qui n'ont pas été choisies pour illustrer ses méthodes. Sans s'attaquer à un problème aussi grandiose, la Balistique constitue un très bon sujet d'études pour ceux qui veulent se faire une idée de la puissance des Mathématiques appliquées à une question d'ordre physique. On verra, dans le Livre du Commandant Charbonnier, comment les problèmes artificiellement simplifiés (qui sont les *Problèmes limites* du premier Livre) se résolvent par des formules explicites; comment ensuite des méthodes appropriées finissent par triompher de la complexité du problème naturel.

Il y a de nos jours une tendance marquée et très louable à soustraire l'enseignement aux préoccupations un peu trop exclusivement théoriques qui l'ont dominé jusqu'ici, à le *mettre en contact avec le réel*, suivant une expression en honneur. Cette tendance va jusqu'à se manifester par les critiques les plus sévères à l'égard de l'Analyse mathématique, dont certains voudraient voir rejeter les trois quarts, comme superflus et stériles. C'est à ceux-là qu'il faut particulièrement recommander la lecture de la *Balistique extérieure rationnelle*. Ils y verront qu'il existe, pour défendre les Mathématiques supérieures, d'autres arguments que le respect de la spéculation pure, et qu'un problème, emprunté directement à la pratique, exige, pour être abordé, les ressources de l'Analyse la plus élevée. R. B.

Balistique extérieure rationnelle (Problèmes balistiques secondaires), par le Commandant *P. Charbonnier*. — 1 vol. in-18 jésus de 400 pages avec 161 figures dans le texte. Prix : 5fr. Paris, Octave Doin, 1907.

Ce Volume appartient à la même collection que le précédent et lui fait suite. On y examine successivement l'influence des causes perturbatrices secondaires négligées au cours de la première Partie de l'étude.

De même que le Volume consacré au Problème balistique principal, celui-ci sera lu avec grand profit, non seulement par les techniciens, mais encore par toutes les personnes qui s'intéressent à la Mécanique rationnelle et veulent se faire une idée de ses applications aux problèmes de la réalité. A ces dernières je signalerai tout particulièrement la théorie des effets de la rotation de la Terre sur le mouvement du projectile, très détaillée et comportant de nombreux exemples numériques, et le Chapitre intitulé *La rotation des solides*, où se trouve un excellent résumé de la théorie des corps tournants, avec une intéressante application au mouvement de la toupie. R. B.

CORRESPONDANCE.

M. G. F. — La formule barycentrique

$$(1) \qquad \sum \alpha \overline{MA}^2 = \lambda \overline{MG}^2 + \text{const.}$$

n'est, au fond, qu'une transformation de la formule

$$\sum \alpha z = \lambda Z,$$

du moins si l'on rattache la géométrie euclidienne à la géométrie aneuclidienne. La seconde formule provient d'une formule en sinus hyperboliques; la première provient d'une formule équivalente en cosinus hyperboliques, dans laquelle on remplace $\operatorname{ch} x$ par $1 + \frac{x^2}{2}, \ldots$.

Quoi qu'il en soit, la détermination de la constante peut d'abord se faire en mettant le point M en G, et c'est le procédé classique; la constante se présente alors sous la forme

$$(2) \qquad C = \sum \alpha \overline{GA}^2.$$

Pour avoir l'autre forme de la constante, celle sur laquelle M. Hilaire a rappelé récemment l'attention des lecteurs du

Journal, on peut mettre successivement le point M en A, B, ...; on a ainsi

$$\ldots\ldots + \beta\overline{AB}^2 + \gamma\overline{AC}^2 + \ldots = \lambda\overline{AG}^2 + C,$$
$$\alpha\overline{BA}^2 + \ldots\ldots + \gamma\overline{BC}^2 + \ldots = \lambda\overline{BG}^2 + C,$$
$$\alpha\overline{CA}^2 + \beta\overline{CB}^2 + \ldots\ldots + \ldots = \lambda\overline{CG}^2 + C,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

si l'on ajoute ces égalités multipliées respectivement par α, β, γ, ..., on a, en tenant compte de l'expression ci-dessus de C,

$$2\sum\alpha\beta.\overline{AB}^2 = \lambda C + \lambda C = 2\lambda C,$$

ou

$$(3) \qquad C = \frac{1}{\lambda}\sum\alpha\beta.\overline{AB}^2.$$

La formule (1), avec l'expression (3) de la constante C, est démontrée dans le *Cours de Mécanique* de Sturm en partant des formules

$$\sum\alpha x = \lambda X, \qquad \sum\alpha y = \lambda Y, \qquad \sum\alpha z = \lambda Z;$$

on élève au carré, on ajoute, etc.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1888.

(1900, p. 573.)

Lorsqu'une transversale $\alpha\beta\gamma$, à un triangle ABC, *passe par le centre du cercle circonscrit à ce triangle, les trois cercles, ayant pour diamètres les diagonales du quadrilatère complet* $AG\alpha\gamma\beta B$, *se coupent en deux points qui sont situés, l'un sur le cercle circonscrit au triangle* ABC, *l'autre sur le cercle des neuf points relatifs au même triangle.* (C. Blanc.)

SOLUTION

Par M. A. Droz-Farny.

La solution élémentaire de cette proposition ne présente aucune difficulté. Voici une solution un peu plus générale.

On sait que, quelle que soit la transversale, les circonférences décrites sur $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ comme diamètres se coupent en deux points fixes P et P′, les points de Monge du quadrilatère, et que les cercles orthotomiques de toutes les coniques inscrites dans ce quadrilatère forment un faisceau, dont les centres sont les points P et P′.

Parmi les coniques du faisceau tangentiel se trouve une seule parabole dont le cercle de Monge se décompose suivant deux droites : la droite infinie et la directrice. Il en résulte que PP′ est la directrice de la parabole inscrite au quadrilatère.

Cette droite contient donc, d'après un théorème bien connu, les orthocentres des quatre triangles qui forment les quatre côtés pris trois à trois du quadrilatère. Donc :

Quelle que soit la transversale, les points P et P′ sont toujours alignés avec H l'orthocentre du triangle fixe ABC.

Considérons un quadrilatère donné et soit P un des points de Monge.

La circonférence $PA\alpha$, décrite sur $A\alpha$ comme diamètre, passe par le pied A′ de la hauteur abaissée de A sur le côté BC.

PH coupe cette circonférence au second point P′.

On a

$$HP.HP' = HA.HA' = -4R^2 \cos A \cos B \cos C.$$

Théorème. — *Les points de Monge sont conjugués par rapport au cercle conjugué du triangle* ABC.

Si P décrit une courbe quelconque, P′ décrit une courbe inverse.

Ainsi par exemple, si P décrit la circonférence ABC, P′ décrit le cercle d'Euler.

Supposons une conique quelconque circonscrite au triangle ABC et soit P un point quelconque de cette conique. Les perpendiculaires élevées en P sur les cordes PA, PB, PC coupent les côtés BC, CA, AB respectivement en α, β, γ et la conique en A′, B′, C′.

On sait d'abord, propriété involutive bien connue, que α, β, γ sont en ligne droite. Mais il est facile de prouver que cette droite contient en outre le point de Frégier correspondant à P.

Dans le cas du cercle circonscrit, ce point devient le centre du cercle circonscrit. En effet, considérons l'hexagone inscrit PA'ACBB qui fournit la pascale

$$\begin{vmatrix} PA' \\ BC \end{vmatrix} = \alpha, \qquad \begin{vmatrix} AC \\ PB' \end{vmatrix} = \beta, \qquad \begin{vmatrix} AA' \\ BB' \end{vmatrix} = F$$

et l'hexagone inscrit PA'ABCC' avec la pascale

$$\begin{vmatrix} PA' \\ BC \end{vmatrix} = \alpha, \qquad \begin{vmatrix} AB \\ PC' \end{vmatrix} = \gamma, \qquad \begin{vmatrix} AA' \\ CC' \end{vmatrix} = F.$$

Il en résulte que les quatre points α, β, γ, F sont en ligne droite, d'où le théorème.

On démontrerait d'une manière plus générale le théorème suivant que j'ai proposé dans *Mathesis* (n° 1188, 1898, p. 239):

On donne un triangle ABC *et une transversale* $\alpha\beta\gamma$ *tournant autour d'un point fixe* D *et coupant* BC, CA, AB *en* α, β, γ.

Le lieu des points de Monge P *et* P' *est une quartique bicirculaire qui, lorsque le point* D *coïncide avec le centre du cercle circonscrit à* ABC, *se décompose suivant le cercle circonscrit et le cercle d'Euler du triangle.*

1891.

(1900, p. [illegible])

Dans un pentagone, les lignes menées par le milieu d'un côté et par le milieu de la droite qui joint les intersections des diagonales issues des extrémités de ce côté sont concourantes.

SOLUTION

Par M. A. Droz-Farny.

Soit ABCDE un pentagone quelconque; représentons par μ, ν, λ les points d'intersection des paires de diagonales AD et BE, AC et BE, AC et BD. La droite qui joint le point

milieu du côté AB au point milieu de la droite de jonction $\mu\lambda$ passe aussi par le point milieu de $D\nu$; c'est la newtonienne du quadrilatère $D\mu\nu\lambda$, lieu géométrique des centres des coniques du faisceau tangentiel touchant les quatre côtés de ce quadrilatère. Or, cette droite contient le centre de la conique particulière du faisceau touchant encore la cinquième diagonale EC du pentagone et par ce même point passeront les quatre autres newtoniennes relatives aux quatre autres côtés du pentagone.

2050.

(1906, p. 480.)

Soient E, D, Δ *les aires d'une ellipse, de sa première développée et de sa seconde développée.*

On a entre ces trois aires la relation

$$2E(\Delta - 4D) = 5D^2.$$

E.-N. Barisien.

SOLUTION

Par M. A. Guyau.

L'ellipse

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t,$$

d'aire

$$(1) \qquad E = \pi ab,$$

a pour développée la courbe bien connue

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t, \qquad y = -\frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t,$$

d'aire

$$(2) \qquad D = \frac{3\pi(a^2 - b^2)^2}{8ab}.$$

Les coordonnées de la développée de cette dernière courbe s'expriment simplement en fonction de t

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a}\left[\cos^3 t + \frac{3}{b^2}\sin^2 t\cos t(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)\right],$$

$$y = -\frac{a^2 - b^2}{b}\left[\sin^3 t + \frac{3}{a^2}\cos^2 t\sin t(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)\right].$$

L'aire de cette courbe est

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x\,dy - y\,dx = \frac{3(a^2-b^2)^2}{2ab}$$

$$\times \int_0^{2\pi} 2(a^2-b^2)\left(\frac{\sin^6 t\cos^2 t}{b^2} - \frac{\cos^6 t\sin^2 t}{a^2}\right) dt$$

$$+ \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{b^2}(2\sin^6 t\cos^2 t - \sin^8 t)\,dt - \frac{b^2}{a^2}(2\sin^2 t\cos^6 t - \cos^8 t)\,dt$$

$$+ \int_0^{2\pi} (4\cos^4 t\sin^4 t - \cos^2 t\sin^6 t - \sin^2 t\cos^6 t - \sin^2 t\cos^2 t)\,dt \quad .$$

L'intégration s'effectue aisément si l'on tient compte de ce que

$$\int_0^{2\pi} e^{ix}\,dx = 0.$$

$$(3)\quad \begin{cases} \Delta = \dfrac{3\pi(a^2-b^2)^2}{ab}\,\dfrac{1}{2^8}\left[-20\,\dfrac{(a^2-b^2)^2}{a^2b^2} - 50\,\dfrac{a^4+b^4}{a^2b^2} + 28\right], \\ \Delta = \dfrac{3\pi(a^2-b^2)^2}{ab}\left[\dfrac{15}{2^7}\,\dfrac{(a^2-b^2)^2}{a^2b^2} - \dfrac{1}{2}\right]. \end{cases}$$

Il ne reste plus, pour obtenir la relation cherchée, qu'à éliminer a et b, ou plutôt (ab) et (a^2-b^2), entre les relations (1), (2) et (3).

2059.

1907, p. 91.)

Soient A, B, C *trois coniques homofocales. Par un point variable de* A *on mène une tangente à* B *et une tangente à* C. *Démontrer que ces deux tangentes font, avec la tangente à* A *au point considéré, des angles dont les sinus* ***ont un rapport constant.*** (Billau.)

SOLUTION

Par M. Parrod.

Soient F et F′ les foyers, M un point de A, MB une tangente à B et MN la bissectrice de l'angle FMF′.

Désignons par $2c$ la distance focale, $2a$ le grand axe de A, $2a'$ celui de B, α l'angle FMN et β l'angle BMN.

Il suffit de montrer que le rapport $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ est constant. φ' étant le symétrique de F′ par rapport à la tangente MB, $FM\varphi' = 2\beta$ et dans les triangles FMF′, $FM\varphi'$, on a

$$4c^2 = MF^2 + MF'^2 - 2MF.MF'\cos 2\alpha,$$
$$4a'^2 = MF^2 + MF'^2 - 2MF.MF'\cos 2\beta;$$

or,

$$MF + MF' = 2a,$$

donc

$$a^2 - c^2 = MF.MF'\cos^2\alpha,$$
$$a^2 - a'^2 = MF.MF'\cos^2\beta,$$
$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2 - a'^2}}.$$

Autre solution de M. Letierce.

NOTE

De M. W.-F. Egan.

Le théorème contenu dans la question 2059 peut être généralisé et étendu à l'espace à trois dimensions comme suit :

1° *Soient trois quadriques homofocales données* α, β, γ. *Par une droite quelconque* L *de l'espace on fait passer six plans* α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2 *tangents à* α, β, γ. *Le rapport*

$$R = \frac{\sin\widehat{\alpha_1\beta_1}\,\sin\widehat{\alpha_2\beta_1}}{\sin\widehat{\alpha_1\gamma_1}\,\sin\widehat{\alpha_2\gamma_1}}$$

a la même valeur pour toutes les positions de L.

2° *Si l'on prend quatre quadriques* α, β, γ, δ, *et si l'on désigne par* $(\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1)$ *le rapport anharmonique*

$$\frac{\sin\widehat{\alpha_1\beta_1}\,\sin\widehat{\gamma_1\delta_1}}{\sin\widehat{\alpha_1\gamma_1}\,\sin\widehat{\beta_1\delta_1}},$$

le produit S *des deux rapports* $(\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1)(\alpha_2\beta_1\gamma_1\delta_2)$ *est constant pour toute position de la droite* L.

DÉMONSTRATION.

1° Soit

$$(1) \qquad pu^2 + qv^2 + rw^2 + t^2 - \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

l'équation tangentielle du système des quadriques.

Déplaçons le trièdre des axes de coordonnées d'une manière quelconque. L'équation (1) prend la forme

$$(2) \qquad \begin{cases} au^2 + bv^2 + cw^2 + 2fvw + 2gwu + 2huv \\ \quad + t(lu + mv + nw + t) = \lambda(u^2 + v^2 + w^2). \end{cases}$$

Prenons, comme nouvel axe des y, la droite L, et prenons, comme plans des xy et des yz, les plans tangents aux deux surfaces λ_1 et λ_2 que touche cette droite. Alors on a

$$c = \lambda_1, \qquad a = \lambda_2, \qquad g = 0.$$

Pour avoir les plans α_1, α_2, posons, dans l'équation (2),

$$\lambda = \alpha, \qquad u = \cos A, \qquad v = 0, \qquad w = -\sin A, \qquad t = 0;$$

ce qui donne

$$\lambda_2 \cos^2 A + \lambda_1 \sin^2 A = \alpha.$$

On a de même, pour β_1 et β_2,

$$\lambda_2 \cos^2 B + \lambda_1 \sin^2 B = \beta;$$

d'où, en soustrayant,

$$\alpha - \beta = (\lambda_1 - \lambda_2) \sin(A - B) \sin(A + B)$$

$$= (\lambda_1 - \lambda_2) \sin \widehat{\alpha_1 \beta_1} \sin \widehat{\alpha_2 \beta_1};$$

de même

$$\alpha - \gamma = (\lambda_1 - \lambda_2) \sin \widehat{\alpha_1 \gamma_1} \sin \widehat{\alpha_2 \gamma_1};$$

donc

$$R = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \gamma} = \text{const.}$$

(Q. E. D.)

2° On remarque que

$$\sin \widehat{\alpha_2 \beta_1} = \sin \widehat{\alpha_1 \beta_2}$$

et ainsi de suite, et l'on a facilement

$$S = \frac{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)}{(\alpha - \gamma)(\beta - \delta)}.$$

C. Q. F. D.

QUESTIONS.

2076. Si l'on pose

$$J_m = \int \frac{x^m e^{a \operatorname{arc\,tang} x}}{\sqrt{1 + x^2}} dx$$

et

$$K_m = \int \frac{x^m e^{a \operatorname{arc\,tang} x}}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx,$$

on peut calculer K_0 et K_1.

Le calcul de toutes les autres intégrales, m étant un entier quelconque, se ramène à celui de J_0.

(R. Le Vavasseur.)

2077. Un triangle ABC étant inscrit à une hyperbole équilatère, si DEF est le triangle pédal d'un point quelconque de la courbe, le point inverse du centre de la courbe par rapport au triangle DEF est le point à l'infini dans une direction fixe, et cette direction est celle de la droite qui est la ligne inverse de la courbe par rapport au triangle ABC.

(G. Fontené.)

[M³6a]

SUR UNE CLASSE DE QUARTIQUES GAUCHES UNICURSALES;

PAR M. CH. MICHEL,
Docteur ès sciences.

1. Dans une Communication à l'Académie des Sciences (18 décembre 1876), M. Appell a signalé le premier l'existence et donné les propriétés les plus importantes des quartiques gauches unicursales dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire. Je me propose d'établir quelques propriétés nouvelles de ces courbes.

Soit une telle courbe C. M. Appell a montré qu'il existe un tétraèdre de référence tel que l'on puisse poser

$$x = \lambda^4, \quad y = \lambda^3, \quad z = \lambda, \quad t = 1,$$

x, y, z, t étant les coordonnées tétraédriques d'un point quelconque M de C et λ étant un paramètre arbitraire. Voici comment est défini ce tétraèdre. Deux de ses sommets sont les points I et J de la courbe C, de paramètres o et ∞, en chacun desquels le plan osculateur rencontre C en quatre points confondus. Les équations de l'arête IJ sont

$$y = 0, \quad z = 0.$$

Les deux autres sommets sont les points d'intersection A de la tangente en I à C avec le plan osculateur en J à C et B de la tangente en J à C avec le plan osculateur en I à C. Les équations de l'arête AB sont

$$x = 0, \quad t = 0.$$

2. Les résultats que j'ai en vue d'établir sont relatifs à deux quadriques liées à la courbe C.

L'une est la quadrique S qui passe par la courbe C et a pour équation tétraédrique

$$xt = yz.$$

L'autre est la quadrique Σ qui est tangente à tous les plans osculateurs à la courbe C, autrement dit, qui est inscrite dans la développable qui a pour arête de rebroussement la courbe C. Les coordonnées tangentielles tétraédriques u, v, w, s du plan osculateur à la courbe C au point M de paramètre λ étant

$$u = 1, \qquad v = -2\lambda, \qquad w = 2\lambda^3, \qquad s = -\lambda^4,$$

la quadrique Σ a pour équation tangentielle tétraédrique

$$vw = 4us.$$

Chacune des deux quadriques S et Σ passe par les arêtes du tétraèdre de référence autres que les arêtes opposées AB et IJ, qui sont conjuguées par rapport à chacune de ces quadriques.

3. Théorème I. — *Par une droite* D *qui rencontre à la fois la courbe* C *et la droite* IJ, *on peut mener quatre plans tangents à la courbe, en dehors du plan qui passe par* D *et par la tangente à* C *au point de rencontre de* C *et de* D. *Les points de contact sont dans un même plan* Π *qui passe par le point de rencontre de* D *avec* IJ.

Désignons, en effet, par M_0, de paramètre λ_0, le point de rencontre de D avec C et par P le point de rencontre de D avec IJ. Définissons le point P comme

étant le point d'intersection de IJ avec le plan qui passe par AB et qui a pour équation

$$x + \rho t = 0.$$

Un plan quelconque passant par P a pour équation

$$x + \alpha y + \beta z + \rho t = 0,$$

α et β étant des paramètres variables. L'équation aux λ des points d'intersection de ce plan avec la courbe C est

$$\lambda^4 + \alpha\lambda^3 + \beta\lambda + \rho = 0;$$

quels que soient α et β, la somme des produits deux à deux des racines de cette équation est nulle, et le produit des racines est égal à ρ.

Supposons alors que le plan passe par M_0 et qu'il soit tangent à C en un point M de paramètre λ. Il rencontre la courbe en un quatrième point M′ de paramètre λ'. On a les deux relations

$$\lambda^2 - \lambda_0\lambda' - 2\lambda(\lambda_0 - \lambda') = 0,$$
$$\lambda^2\lambda_0\lambda' = \rho.$$

Éliminons λ'; il vient

$$\lambda_0\lambda^4 + 2\lambda_0^2\lambda^3 - 2\rho\lambda - \rho\lambda_0 = 0,$$

équation du quatrième degré en λ, qui a pour racines les paramètres des points de contact de quatre plans tangents menés à la courbe C par la droite D. Cette équation est aussi l'équation aux λ des points d'intersection de la courbe C avec le plan H qui a pour équation

$$\lambda_0 x - 2\lambda_0^2 y + 2\rho z + \rho\lambda_0 t = 0.$$

Ce plan passe par le point P_1

Théorème II. — *Quand la droite varie d'une manière quelconque, le plan* Π *enveloppe la quadrique* Σ.

En effet, si u, v, w, s sont les coordonnées tangentielles du plan Π, on a

$$u = \lambda_0, \qquad v = 2\lambda_0^2, \qquad w = 2\rho, \qquad s = \rho\lambda_0$$

et, quels que soient λ_0 et ρ, on a, entre u, v, w, s, la relation

$$vw = 4\,us,$$

équation tangentielle de la quadrique Σ.

Théorème III. — *Quand la droite* D *varie de manière que son point de rencontre avec la courbe* C *reste fixe, le plan* Π *tourne autour d'une génératrice rectiligne de la quadrique* Σ, *qui n'est pas du même système que les tangentes en* I *et* J *à la courbe* C.

En effet, supposons λ_0 fixe dans l'équation générale du plan Π. Cette équation dépend alors linéairement du paramètre ρ; le plan passe ainsi par une droite fixe qui a pour équations

$$x + 2\lambda_0 y = 0, \qquad 2z + \lambda_0 t = 0.$$

Cette droite est une génératrice rectiligne de la quadrique Σ. Elle rencontre les tangentes en I et J à la courbe C, qui ont pour équations : la première, $x = 0$, $y = 0$, la seconde, $z = 0$, $t = 0$. Elle n'est donc pas du système de génératrices rectilignes qui contient les tangentes en I et J à la courbe C.

Théorème IV. — *Quand les points de rencontre de la droite* D *avec* IJ *et avec* C *se correspondent*

homographiquement, de façon que, lorsque l'un vient en I *ou en* J, *l'autre vienne aussi en* I *ou en* J, *le plan* Π *tourne autour d'une génératrice rectiligne de la quadrique* Σ *qui est du même système que les tangentes à la courbe* C *en* I *et* J.

La correspondance homographique énoncée se traduit, en effet, par la relation

$$\rho = a\lambda_0,$$

a étant une quantité constante. L'équation du plan Π s'écrit alors

$$x + 2\lambda_0 y + 2az + a\lambda_0 t = 0.$$

Elle dépend linéairement du paramètre λ_0. Le plan Π passe donc par une droite fixe qui a pour équations

$$x + 2az = 0, \qquad 2y + at = 0.$$

Cette droite est une génératrice rectiligne de la quadrique Σ qui ne rencontre ni la tangente en I ni la tangente en J à la courbe C. Elle est du même système que ces deux droites.

4. Par dualité, on a, relativement à la développable qui a pour arête de rebroussement la courbe C, les théorèmes suivants qu'il suffit d'énoncer :

Théorème V. — *Une droite* Δ *qui touche la développable et qui rencontre la droite* AB *rencontre la développable en quatre points autres que le point de contact. Les plans tangents à la développable en ces quatre points passent par un même point* μ *qui est situé dans le plan qui contient* AB *et* Δ.

Théorème VI. — *Quand la droite* Δ *varie d'une manière quelconque, le lieu du point* μ *est la quadrique* S.

Théorème VII. — *Quand la droite* Δ *se déplace dans un plan tangent fixe à la développable, le point* μ *décrit une génératrice rectiligne de la quadrique* S, *qui n'est pas du même système que les tangentes en* I *et* J *à la courbe* C.

Théorème VIII. — *Quand le plan osculateur qui contient* Δ *et le plan qui passe par* AB *et* Δ *se correspondent homographiquement de façon que, lorsque l'un vient à coïncider avec le plan osculateur en* I *ou en* J, *l'autre vienne aussi à coïncider avec le plan osculateur en* I *ou en* J, *le point* μ *décrit une génératrice rectiligne de la quadrique* S, *qui est du même système que les tangentes à la courbe* C *en* I *et* J.

5. Des résultats précédents on peut déduire des théorèmes démontrés par Laguerre (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1878) sur les quartiques planes à trois points doubles d'inflexion et sur les courbes planes de quatrième classe à trois tangentes doubles de rebroussement. Voici en vertu de quelles considérations :

1° Un plan passant par la droite IJ rencontre la courbe C en deux points variables dont les paramètres sont égaux et de signes contraires. En effet, un tel plan a une équation de la forme

$$y - kz = 0$$

et l'équation aux λ des points d'intersection de ce plan avec la courbe est

$$\lambda^3 - k\lambda = 0,$$

qui, débarrassée de ses racines fixes o et ∞, se réduit à

$$\lambda^2 - k = 0,$$

équation dont les racines sont égales et de signes contraires. Il est immédiat, par identification, que, inversement, si deux points ont des paramètres égaux et de signes contraires, la droite qui les joint rencontre IJ.

2° Par un point P de la droite IJ on peut mener quatre plans osculateurs à la courbe C, et les points de contact sont répartis deux à deux sur deux droites issues de P. En effet, le plan osculateur au point M, de paramètre λ, a pour équation

$$x - 2\lambda y + 2\lambda^3 z - \lambda^4 t = 0.$$

Écrivons qu'il passe par le point P défini par l'intersection de la droite IJ avec le plan mené par AB ayant pour équation $x + \rho t = 0$. On trouve ainsi la condition

$$\lambda^4 = -\rho,$$

équation du quatrième degré dont les racines sont deux à deux égales et de signes contraires. D'où le théorème.

Cela posé, projetons coniquement du point P situé sur IJ la courbe C sur un plan. La projection est une courbe du quatrième degré c qui admet pour points doubles d'inflexion la trace de la droite IJ et les traces des deux droites issues de P qui contiennent les points de contact des plans osculateurs à la courbe C qui passent par P. Les tangentes aux points doubles sont les traces des quatre plans osculateurs menés de P à la courbe C et les projections des tangentes en I et J à la courbe C. Du théorème I on déduit alors le théorème suivant :

Étant donnée une courbe plane c du quatrième degré à trois points doubles d'inflexion, d'un point m_0 de cette courbe on peut mener quatre tangentes à la courbe, autres que la tangente en m_0; les points de contact sont sur une droite π.

Cette droite π est la trace du plan Π défini précédemment. Quand, P restant fixe, M_0 se déplace sur la courbe C, le plan Π enveloppe le cône circonscrit à la quadrique Σ, de sommet P. Ce cône est tangent aux deux plans qui passent par P et par les tangentes en I et J à la courbe et aux plans osculateurs à la courbe C issus de P. En projetant on a, relativement à la courbe C, le théorème suivant :

Quand le point m_0 se déplace sur la quartique c, la droite π enveloppe une conique qui est tangente aux six tangentes aux points doubles de la quartique c.

Par dualité, on a les résultats suivants, relatifs à la développable qui a pour arête de rebroussement la courbe C :

Une section de cette développable par un plan quelconque passant par AB *est une courbe de la quatrième classe ayant trois tangentes doubles de rebroussement.*

Étant donnée une courbe de la quatrième classe ayant trois tangentes doubles de rebroussement, une tangente quelconque à cette courbe la rencontre en quatre points autres que le point de contact. Les tangentes en ces quatre points sont concourantes en un point dont le lieu est la conique qui passe par les six points de rebroussement de la courbe.

[H12d]

SUR LES PROPRIÉTÉS D'ADDITION D'UNE SUITE RÉCURRENTE CONSIDÉRÉE PAR D. BERNOULLI;

PAR M. AMSLER.

Étant donnée une équation

$$f(x) = x^m - p_1 x^{m-1} - p_2 x^{m-2} - \ldots - p_m = 0$$

dont les racines sont $a, b, c, \ldots, l$, on considère les coefficients des puissances décroissantes de x dans le développement de $\frac{1}{f(x)}$, que l'on appelle $u_{m-1}, u_m, \ldots, u_n, \ldots$.

On démontre aisément que l'on a

$$u_{n+1} = p_1 u_n + p_2 u_{n-1} + \ldots + p_m u_{n-m+1}$$

et, pour plus de commodité dans la théorie générale,

$$u_n = \sum \frac{a^n}{(a-b)\ldots(a-l)}.$$

Nous allons étudier les propriétés d'addition de u relativement à n.

Forme symbolique de u_n. — Considérons les m équations suivantes linéaires par rapport aux quantités telles que $\frac{a^n}{(a-b)\ldots(a-l)}$:

$$\sum \frac{a^n}{(a-b)\ldots(a-l)} = u_n,$$

$$\sum a \frac{a^n}{(a-b)\ldots(a-l)} = u_{n+1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\sum a^{m-1} \frac{a^n}{(a-b)\ldots(a-l)} = u_{n+m-1}.$$

On en conclut

$$\frac{a^n}{(a-b)\ldots(a-l)} = \frac{\begin{vmatrix} u_n & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ u_{n+1} & b & c & \ldots & l \\ \ldots & . & . & \ldots & . \\ u_{n+m-1} & b^{m-1} & c^{m-1} & \ldots & l^{m-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a & b & . & \ldots & l \\ . & . & . & \ldots & . \\ a^{m-1} & b^{m-1} & . & \ldots & l^{m-1} \end{vmatrix}}.$$

Les deux termes de la fraction sont divisibles par le produit des différences des racines $b, c, \ldots, l$.

Imaginons que les indices des u soient placés en exposants symboliques; on a, en supprimant le facteur commun $\Pi(b-c)$:

$$\frac{a^n}{(a-b)\ldots(a-l)} = \frac{u^{(n)}(u-b)(u-c)\ldots(u-l)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)}.$$

D'où la formule symbolique

$$a^n = u^{(n)}(u-b)(u-c)\ldots(u-l).$$

Usage de la notation symbolique. — Cette notation est d'un maniement commode.

Calculons, par exemple, la fonction symétrique Σa^n en fonction des u; on a

$$\Sigma a^n = \Sigma u^{(n)}(u-b)\ldots(u-l) = u^{(n)}\Sigma(u-b)\ldots(u-l),$$

c'est-à-dire

$$\Sigma a^n = u^{(n)} f'(u),$$

$$\Sigma a^n = m u_{m+n-1} - (m-1) p_1 u_{m+n-2} - \ldots.$$

Calculons encore la fonction $\sum \frac{a^n}{a-b}$.

Pour cela, nous groupons les deux termes $\frac{a^n}{a-b}$ et $\frac{b^n}{b-a}$ dont la somme est

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} = \frac{u^{(n)}[(u-b)(u-c)\ldots(u-l) - (u-a)(u-c)\ldots(u-l}{a-b}$$

ou

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = u^{(n)}(u - c)(u - d)\ldots(u - l).$$

$$\sum \frac{a^n}{a - b} = u^{(n)} \Sigma (u - c)(u - d)\ldots(u - l).$$

Mais on a

$$f'(u) = \Sigma (u - b)(u - c)\ldots(u - l),$$

et, en dérivant,

$$f''(u) = 2\Sigma (u - c)(u - b)\ldots(u - l),$$

puisqu'un terme tel que $(u - c)(u - d)\ldots(u - l)$ peut s'obtenir de deux façons. On a donc

$$\sum \frac{a^n}{a - b} = \frac{1}{2} u^{(n)} f''(u).$$

On verrait, en dérivant une fois de plus, que l'on a

$$\sum \frac{a^n}{(a - b)(a - c)} = \frac{1}{2.3} u^{(n)} f'''(u),$$

et d'une façon générale

$$\sum \frac{a^n}{(a - b)\ldots(a - h)} = \frac{u^{(n)}}{p!} f^{(p)}(u),$$

p étant le nombre des racines $a, b, \ldots, h$.

Comme vérification, on a bien

$$\sum \frac{a^n}{(a - b)\ldots(a - l)} = \frac{u^{(n)}}{n!} f^{(n)}(u).$$

Addition des u. — Pour la commodité de l'écriture, soit v une lettre qui est la même que u et que l'on remplacera par u, une fois le calcul symbolique achevé.

Nous avons

$$a^n = u^{(n)}(u-b)\ldots(u-l),$$
$$a^{n'} = v^{(n')}(v-b)\ldots(v-l).$$

Il viendra

$$a^{n+n'} = u^{(n)}v^{(n')}[(u-b)(u-c)\ldots(u-l)(v-b)(v-c)\ldots(v-l)]$$

Notre but est l'évaluation de

$$u_{n+n'} = \sum \frac{a^{n+n'}}{(a-b)\ldots(a-l)}.$$

Il vient donc

$$a^{n+n'} = u^{(n)}v^{(n')}\sum \frac{(u-b)(u-c)\ldots(u-l)(v-b)(v-c)\ldots(v-l)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)}$$

Je dis que le Σ est identique au polynome

$$\frac{f(u)-f(v)}{u-v}.$$

On voit, en effet, que ce polynome et le Σ sont des polynomes en u de degré $m-1$, qui prennent les mêmes valeurs pour $u = a, b, \ldots, l$, puisque, pour $u = a$, par exemple, on a de part et d'autre

$$(v-b)(v-c)\ldots(v-l).$$

On a donc, symboliquement,

$$u_{n+n'} = u^{(n)}v^{(n')}\frac{f(u)-f(v)}{u-v}.$$

Pour bien expliquer le retour de la notation symbolique aux indices, prenons pour $f(x)$ un polynome du deuxième degré : $f(x) = x^2 - px - q$.

$$u_{n+n'} = u^{(n)}v^{(n')}\frac{[(u^2-pu-q)-(v^2-pv-q)]}{u-v}$$
$$= u^{(n)}v^{(n')}(u+v-p),$$
$$u_{n+n'} = u_{n+1}u_{n'} + u_{n'+1}u_n - pu_nu_{n'}.$$

Exemple. — Dans la suite de Fibonnacci, que l'on obtient pour $f(x) = x^2 - x - 1$ et dans laquelle chaque terme est la somme des deux précédents :

u_1	1
u_2	1
u_3	2
u_4	3
u_5	5
u_6	8
u_7	13
u_8	21
u_9	34
u_{10}	55
u_{11}	89
u_{12}	144
u_{13}	233
u_{14}	377

$$u_{9+5} = u_{14} = u_{10}u_5 + u_9u_6 - u_9u_5$$

$$377 = 5 \times 55 + 8 \times 34 - 5 \times 34.$$

Prenons encore : $f(x) = x^3 - px^2 - qx - r$

$$u_{n+n'} = u^{(n)}v^{(n')}[u^2 + uv + v^2 - p(u+v) - q].$$

Ici, on peut simplifier la formule d'addition au moyen de la loi de récurrence, $u^3 - pu^2 - qu - r$ devant être regardé comme nul,

$$\begin{aligned} u_{n+n'} &= u^n v^{n'} uv + u^n v^{n'-1}(v^2 - pv^2 - qv) \\ &\quad + u^{n-1}v^{n'}(u^3 - pu^2 - qu) + qu^n v^{n'}, \end{aligned}$$

$$u_{n+n'} = u^{n+1}v^{n'+1} + r(u^n v^{n'-1} + u^{n-1}v^{n'}) + qu^n v^{n'},$$

$$u_{n+n'} = u_{n+1}u_{n'+1} + r(u_n u_{n'-1} + u_{n'}u_{n-1}) + qu_n u_{n'}.$$

Exemple. — $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; on obtient comme suite les nombres triangulaires

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & 36 & 45 & \ldots, \\ u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & \ldots. \end{array}$$

$$u_{6+4} = u_{10} = u_7u_5 + u_6u_3 + u_4u_5 - 3u_4u_6,$$

$$45 = 210 + 45 + 60 - 270.$$

Formules de multiplication. — Si, dans la formule qui donne $u_{n+n'}$, on fait $n' = n$, on aura une formule qui donne u_{2n}. De même, en faisant $n' = n - 1$, on calculera u_{2n-1}.

Exemple. — $f(x) = x^2 - px - q$.

$$u_{2n} = 2u_n u_{n+1} - pu_n^2 = pu_n^2 + 2qu_n u_{n-1},$$
$$u_{2n-1} = u_n^2 + u_{n-1}u_{n+1} - pu_n u_{n-1} = u_n^2 - qu_{n-1}^2.$$

On voit que ces formules donnent de proche en proche u_{2^k} et u_{2^k-1}, on effectue ainsi la duplication; il est évident qu'en choisissant n' égal à $2n$ et se servant de la duplication, on effectuerait la triplication, etc. Mais il est plus simple d'appliquer l'addition à plus de deux indices.

Addition à 3, 4, ... *indices.* — On verrait comme plus haut que l'on a

$$u_{n+n'+n''} = u^{(n)} v^{(n')} w^{(n'')} \sum \frac{f(v) f(w)}{(u-v)(u-w)}.$$

Calculons cette formule pour $f(x) = x^2 - px - q$

$$\sum \frac{f(v) f(w)}{(u-v)(u-w)} = \frac{\begin{vmatrix} f(v) f(w) & u & 1 \\ f(w) f(u) & v & 1 \\ f(u) f(v) & w & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u^2 & u & 1 \\ v^2 & v & 1 \\ w^2 & w & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} u f(u) & f(u) & 1 \\ v f(v) & f(v) & 1 \\ w f(w) & f(w) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u^2 & u & 1 \\ v^2 & v & 1 \\ w^2 & w & 1 \end{vmatrix}}.$$

En décomposant les colonnes des numérateurs en colonnes partielles, on a aisément

$$\sum = vw + wu + uv - p(u + v + w) + p^2 + q$$

et

$$u_{n+n'+n''} = u^{(n)} v^{(n')} w^{(n'')} \sum \frac{f(v) f(w)}{(u-v)(u-w)}.$$

On verrait de même que

$$u^{(n+n'+n''+n'''} = -u^{(n'} v^{(n''} w^{(n'''} s^{(n'''} \sum \frac{f(v)\,f(w)\,f(s)}{(u-v)(u-w)(u-s)}, \quad \ldots;$$

etc.

Applications. — Les propriétés précédentes s'appliquent dans le calcul des racines par la méthode de Bernoulli et dans l'étude de la décomposition des termes des suites numériques en facteurs.

Exemple. — Calcul de $\sqrt{2}$ par la suite de Pell,

$$x^2 = 2,$$

on a

$$y^2 - 2y - 1 = 0.$$

En posant

$$x = 1 - \frac{1}{y},$$

on sait que

$$\sqrt{2} - 1 = \lim \frac{u_n}{u_{n+1}}$$

$$\begin{array}{l}
+1 \\
4 - 2 \\
10 + 5 \\
\quad 24 + 12 \\
\qquad 58 + 29 \\
\qquad\quad 140 + 70 \\
\qquad\qquad 338 + 169 \\
\qquad\qquad\quad 816 + 408 \\
\qquad\qquad\qquad 1570 + 985 \\
\qquad\qquad\qquad\quad 4756
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|l}
1 - 2 - 1 \\
\hline
1 - 2 + 5 + 12 + 29 + 70 + 169 \\
\quad + 408 + 985 + 2178 + 5741
\end{array}$$

$$u_9 = 985, \qquad u_{19} = \overline{2378}^2 - \overline{985}^2,$$

$$u_{10} = 2378, \qquad u_{20} = 2 \times \overline{2378}^2 + 2 \times 2378 \times 985.$$

$$u_{11} = 5741, \qquad u_{21} = \overline{2378}^2 + \overline{5741}^2 \quad \text{ou} \quad 2u_{20} + u_{19}.$$

On a calculé ainsi u_{20} et u_{19} par duplication sans avoir besoin des u intermédiaires entre u_{11} et u_{19}.

On a, d'ailleurs,

$$\frac{u_{19}}{u_{20}} > \sqrt{2} - 1 > \frac{u_{20}}{u_{21}},$$

avec

$$\frac{u_{19}}{u_{20}} - \frac{u_{20}}{u_{21}} = \frac{1}{u_{19} \cdot u_{20}}.$$

Exemple. — On conclut des formules établies plus haut que, pour $f(x) = x^2 - px - q$ (p et q entiers), que u_r divise u_{nr} $\left(\text{autrement : } \frac{a^{nr} - b^{nr}}{a - b} \text{ est divisible par } \frac{a^r - b^r}{a - b}\right)$.

Exemple. — Si, dans $x^2 - px - q$, on a $q = -a^2$, tous les u_{2n+1} se décomposent comme suit :

$$u_{2n+1} = u_{n+1}^2 - a^2 u_n^2 = (u_{n+1} + a u_n)(u_{n+1} - a u_n).$$

Exemple. — Pour $f(x) = x^2 - px - q$, on a

$$u_{3m+1} = u_{m+1}^3 + 3q u_{m+1} u_m^2 - pq u_m^3;$$

s'il y a un nombre entier N tel que

$$N^3 + 3qN - pq = 0,$$

on connaît une décomposition de u_{3m+1} en facteurs.

[X4bγ]

SUR LA RÉSOLUTION GRAPHIQUE DES EQUATIONS LINÉAIRES;

PAR M. FARID BOULAD,
Ingénieur au Service des ponts des chemins de fer
de l'État égyptien.

Dans son cours de *Calcul graphique et Nomographie* qu'il a fait tout récemment à la Sorbonne [1],

[1] Ce Cours va être publié incessamment dans l'*Encyclopédie scientifique*. Doin, éditeur.

M. d'Ocagne a exposé les méthodes de résolution graphique des équations linéaires de MM. Massau et Van den Berg, sous une forme qui nous a conduit à trouver les nouveaux procédés suivants qui ne sont pas moins simples.

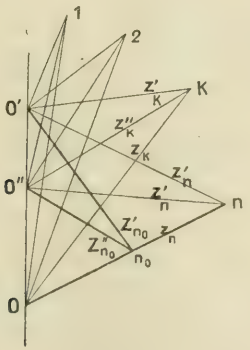
1. Nous donnerons d'abord deux nouvelles solutions graphiques du problème suivant :

a. Étant donnés deux systèmes de valeurs des inconnues satisfaisant à $(n-1)$ *de* n *équations linéaires à* n *inconnues, déterminer graphiquement les valeurs des inconnues de ces* n *équations.*

La solution de ce problème permet de résoudre les équations linéaires en suivant la marche adoptée par M. d'Ocagne dans son cours de *Calcul graphique*.

Première solution. — Considérons les trois faisceaux de droites qu'on obtient en joignant un système de n points $1.2.3\ldots k\ldots n$ (*fig.* 1) à chacun des trois

Fig. 1.



pôles O, O', O'' pris sur une même ligne de rappel (nom que M. d'Ocagne a donné dans son *Cours* à toute

parallèle à Oy). Désignons par $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ les coefficients angulaires des rayons polaires $O1$, $O2$, $O3$, ..., On du premier faisceau et par $z'_1, z'_2, z'_3, \ldots, z'_n$ et $z''_1, z''_2, z''_3, \ldots, z''_n$ ceux des rayons polaires des deux autres faisceaux de pôles O' et O''.

Donnons-nous un système de n équations linéaires

$$(1)\qquad \begin{cases} a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_n z_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ r_0 + r_1 z_1 + r_2 z_2 + \ldots + r_n z_n = 0, \\ s_0 + s_1 z_1 + s_2 z_2 + \ldots + s_n z_n = 0. \end{cases}$$

Démontrons la proposition suivante :

b. Si chacun des deux systèmes de coefficients angulaires $z'_1, z'_2, z'_3, \ldots, z'_n$ et $z''_1, z''_2, z''_3, \ldots, z''_n$ relatifs aux pôles O' et O'' satisfait à $(n-1)$ de ces n équations, aux $(n-1)$ premières par exemple, le système des coefficients $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ relatif au pôle O satisfait aussi à ces $(n-1)$ équations, quelle que soit la position de ce dernier pôle sur la verticale des deux pôles arbitraires O' et O''.

En effet, posons $\frac{O''O}{O'O''} = \alpha$; les trois rayons polaires Ok, $O'k'$, $O''k''$ de coefficients angulaires z_k, z'_k, z''_k donnent

$$\frac{z_k - z''_k}{z''_k - z'_k} = \frac{O''O}{O'O''} = \alpha$$

ou bien

$$(2)\qquad z_k = (1+\alpha) z''_k - \alpha z'_k.$$

Pour démontrer que le système de coefficients angulaires $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ est une solution des $(n-1)$ premières équations (1), il suffit de le prouver pour l'une quelconque de ces $(n-1)$ équations, pour la première par exemple,

Or, nous avons par hypothèse les deux équations :

$$a_0 + a_1 z'_1 + a_2 z'_2 + \ldots + a_n z'_n = 0.$$
$$a_0 + a_1 z''_1 + a_2 z''_2 + \ldots + a_n z''_n = 0.$$

En multipliant la première par $(-\alpha)$ et la deuxième par $(1+\alpha)$ et en additionnant, on trouve, en vertu de la relation (2), que le système de valeurs z_1, z_2, z_3, ..., z_n est une solution de la première des n équations (1), et de même pour les $n-2$ autres.

A présent, montrons comment on pourrait déterminer graphiquement la position du pôle du faisceau $(O.1.2.3\ldots n)$ dont les coefficients angulaires forment la solution des n équations (1).

Pour cela, considérons les deux équations suivantes :

$$(3)\quad \begin{cases} s_0 + s_1 z'_1 + s_2 z'_2 + \ldots + s_{n-1} z'_{n-1} + s_n z'_{n_0} = 0, \\ s_0 + s_1 z''_1 + s_2 z''_2 + \ldots + s_{n-1} z''_{n-1} + s_n z''_{n_0} = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles z'_{n_0} et z''_{n_0} représentent les valeurs que prend l'inconnue z_n de la dernière équation du système (1) lorsqu'on y substitue aux autres inconnues z_1, z_2, z_3, ..., z_{n-1} chacun des deux systèmes de valeurs z'_1, z'_2, ..., z'_{n-1} et z''_1, z''_2, ..., z''_{n-1}.

Supposons que par un procédé quelconque on ait obtenu les deux valeurs z'_{n_0} et z''_{n_0}. On pourrait appliquer à cet effet la méthode donnée par M. d'Ocagne dans son cours de *Calcul graphique* précité, laquelle consiste à construire avec les deux systèmes de valeurs z'_1, z'_2, ..., z'_{n-1} et z''_1, z''_2, ..., z''_{n-1} deux polygones sur le *schéma* de la deuxième équation du système (1) et à prendre, pour valeurs de z'_{n_0} et z'_{n_0}, les coefficients angulaires des derniers côtés de ces deux polygones.

Tirons les deux rayons polaires $O'n_0$ et $O''n_0$ de

coefficients angulaires z'_{n_0} et z''_{n_0}. Je dis que la droite nn_0 coupe la verticale O″O′ au pôle O relatif à la solution des n équations (1).

En effet, désignons par z_n le coefficient angulaire de cette droite et appliquons la relation (2) aux deux points n et n_0, nous avons :

$$(4) \qquad z_n = (1+\alpha)z''_n - \alpha z'_n = (1+\alpha)z''_{n_0} - \alpha z'_{n_0}.$$

En multipliant la première des deux équations (3) par $(-\alpha)$ et la deuxième par $(1+\alpha)$, on trouve, en vertu des relations (2) et (4), que les coefficients z_1, $z_2, \ldots, z_n$ des rayons polaires du faisceau (O.1.2.3...n) satisfait à la dernière des n équations (1). Or, comme, d'après la proposition (b), ces coefficients satisfont aussi aux $(n-1)$ premières de ces n équations, il en résulte qu'ils constituent la solution de ces n équations.

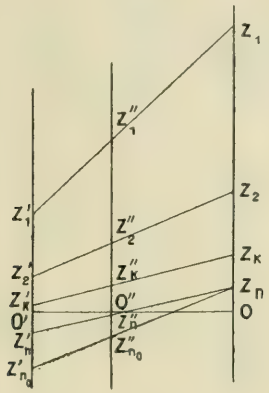
Deuxième solution. — Le principe de dualité, appliqué au moyen des coordonnées parallèles de M. d'Ocagne à la figure 1, donne la figure 2 qui fournit une autre solution du problème ci-dessus (a). Dans cette dernière figure, nous avons trois axes parallèles O, O′, O″. OZ_1, OZ_2, OZ_3, ..., OZ_n sont des segments représentatifs des valeurs z_1, z_2, z_3, ..., z_n; de même avec les accents prime et seconde. Chacun des trois points Z_k, Z'_k, Z''_k correspondant à une même variable quelconque z_k est aligné.

L'axe O des segments représentatifs des valeurs $z_1, z_2, \ldots, z_n$ satisfaisant aux n équations (1) est déterminé par le point de rencontre Z_n des deux alignements $Z'_n Z''_n$ et $Z'_{n_0} Z''_{n_0}$.

2. Procédé de résolution nomographique des équations linéaires. — Le principe du double ali-

gnement concourant de M. d'Ocagne permet, en vue de la résolution des équations linéaires, d'effectuer d'une manière simple l'élimination des inconnues.

Fig. 2.



Soient

$$(e) \qquad a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_n z_n = 0,$$

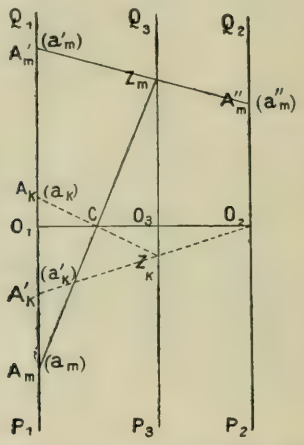
$$(e') \qquad a'_0 + a'_1 z_1 + a'_2 z_2 + \ldots + a'_n z_n = 0$$

deux équations linéaires. Désignons par $a''_0, a''_1, a''_2, \ldots, a''_n$ les coefficients de l'équation résultant de l'élimination d'une inconnue quelconque z_k entre ces deux équations. Ces coefficients s'obtiennent, par simple lecture, au moyen du nomogramme à double alignement (*fig.* 3) constitué par les éléments suivants : deux échelles régulières confondues $P_1 Q_1$ relatives aux coefficients des équations (e) et (e'); une échelle régulière $P_2 Q_2$ parallèle à $P_1 Q_1$ et relative aux coefficients de l'équation résultante (e''); un axe des pivots $P_3 Q_3$ parallèle à ces échelles et de position arbitraire; un point C de position variable sur la droite des origines $O_1 O_2$ des échelles $P_1 Q_1$ et $P_2 Q_2$.

Pour avoir les coefficients de l'équation (e'') résul-

tant de l'élimination d'une inconnue z_k entre deux équations quelconques (e) et (e'), on détermine d'abord la position du point C sur $O_1 O_2$ de la façon suivante :

Fig. 3.



On mène l'alignement $O_2 A'_k$, et, par le point de rencontre Z_k avec $P_3 Q_3$, on tire l'alignement $Z_k A_k$ qui coupe $O_1 O_2$ au point C.

A présent, pour avoir le point A''_m coté a''_m sur $P_2 Q_2$, on mène l'alignement $A_m C Z_m$, et, en le faisant pivoter autour de son point de rencontre Z_m avec $P_3 Q_3$, on l'amène dans la position $A'_m Z_m$ qui rencontre $P_2 Q_2$ au point A''_m.

Démonstration. — En posant $O_1 O_3 = \delta_1$, $O_2 O_3 = \delta_2$ et $\frac{CO_3}{O_1 C} = \gamma$, on a la condition suivante qui exprime que les deux alignements $A_m C$ et $A'_m A''_m$ concourent sur l'axe $P_3 Q_3$

$$a''_m = \gamma(\delta_1 + \delta_2) a_m - \delta_2 a'_m.$$

Cette relation est linéaire par rapport à a_m, a'_m et a''_m

et à un seul paramètre γ dont la valeur est donnée par les deux alignements concourants $O_2 Z_k A'_k$ et $A_k C Z_k$ correspondant à $a''_k = 0$.

Remarque. — Il convient dans la pratique de considérer deux axes des pivots : l'un, dans l'intervalle $O_1 O_2$, et l'autre, en dehors de cet intervalle, de façon qu'avec l'un de ces deux axes le point C tombe toujours dans l'intervalle $O_1 O_2$.

[R4d]

LES POLYGONES CORRÉLATIFS DES FUNICULAIRES ET LEURS APPLICATIONS;

PAR M. FARID BOULAD,
Ingénieur au Service des ponts des chemins de fer de l'État égyptien.

En appliquant au calcul des ponts la méthode nomographique des points alignés que notre ancien professeur M. d'Ocagne a créée par l'application du principe de dualité dans le domaine de la Nomographie, nous avons été incité, par les avantages de cette méthode, à effectuer une transformation analogue dans le domaine de la Statique graphique. Tel est l'objet de la présente Note. Mais, tandis que la transformation dualistique adoptée par M. d'Ocagne repose sur l'échange des coordonnées cartésiennes en coordonnées parallèles, celle à laquelle nous nous sommes arrêté ici, en raison des avantages spéciaux qu'elle offre pour l'objet que nous avons en vue, résulte de l'échange des coordonnées cartésiennes en un autre système de coordonnées tan-

gentielles, qui a fait aussi l'objet d'une étude développée de la part de M. d'Ocagne [1].

Nous utiliserons cette dernière transformation pour former certains polygones qui permettent de résoudre graphiquement d'une façon simple, différente de celle des polygones funiculaires, les problèmes les plus usuels de la résistance des matériaux et de la stabilité des constructions.

Nous proposons d'appeler ces polygones *funiculaires corrélatifs*. Nous les appliquerons, dans cette Note, à la composition et à la détermination des moments statiques d'un système quelconque de forces, à la détermination des réactions d'appuis, des moments fléchissants et efforts tranchants développés dans une poutre à appuis simples, et à une nouvelle représentation graphique des moments fléchissants dans ces poutres.

Ces quelques applications suffiront à montrer l'utilité que présente ce genre de polygones pour diverses applications rentrant dans le domaine de la Statique graphique, et l'avantage qu'offre leur emploi quand il s'agit d'un tracé expéditif tout en évitant les erreurs de graphique que l'on peut craindre avec les funiculaires ordinaires en raison du tracé des parallèles aux rayons polaires.

I. — NOTIONS RELATIVES AUX FIGURES CORRÉLATIVES.

Avant d'aborder les *funiculaires corrélatifs*, nous définirons la transformation corrélative sur laquelle repose la construction de ces polygones et nous éta-

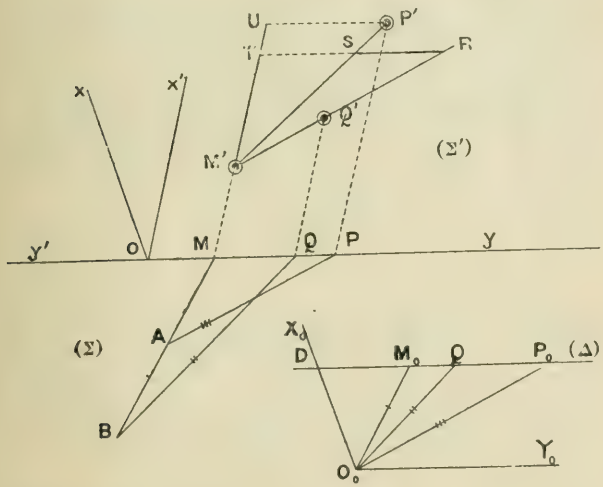
---

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4e série, t. I, p. 433.

blirons une propriété métrique des figures corrélatives qui permet de faire dériver les propriétés de ces funiculaires corrélatifs de celles des funiculaires ordinaires.

1. **Transformation géométrique corrélative de M. d'Ocagne** [1]. — *Considérons une droite* AM (*fig.* 1) *dans*

Fig. 1.



le plan d'une figure Σ *rapportée à deux axes* (Ox, Oy). *Par l'origine arbitraire de deux axes* (O_0x_0, O_0y_0) *parallèles aux axes* (Ox, Oy), *menons une parallèle* O_0M_0 *à la droite* AM *jusqu'à sa rencontre en* M_0 *avec la parallèle* (Δ), *à l'axe* O_0y_0, *menée par le point* D *de* O_0x_0, *tel que* $O_0D = 1$.

Si, à partir du point de rencontre M *de la droite* AM *avec l'axe* Oy, *on porte, sur la parallèle menée par ce point à un axe* Ox', *une longueur* MM'

---

[1] Cette transformation s'obtient par simple échange, en coordonnées cartésiennes, des coordonnées tangentielles de M. d'Ocagne.

égale au coefficient angulaire DM_0 *de la droite* AM, *le point* M′ *appartiendra à une autre figure* Σ′ *corrélative de* Σ *et correspondra, dans cette figure, à la droite* AM *de la première.*

Démonstration. — Rapportons la figure Σ′ à deux axes (Ox', Oy') tels que Oy' se confonde avec l'axe des y négatifs.

Désignons par (x, y) les coordonnées d'un point courant de la droite AM et par (x', y') les coordonnées du point corrélatif M′ de cette droite.

D'après l'énoncé de la proposition ci-dessus, (x', y') représentent, pour la droite AM, les coordonnées tangentielles de M. d'Ocagne. L'équation de cette droite, rapportée aux axes (Ox, Oy), s'écrit

$$y + y' = xx'.$$

Cette équation étant linéaire par rapport aux coordonnées $x' = MM'$, $y' = -OM$ du point M′, les deux figures Σ et Σ′ sont *corrélatives;* elles sont aussi *réciproques.* Nous les rapporterons, dans tout ce qui suit, respectivement aux deux systèmes d'axes (Ox, Oy) et (Ox', Oy').

Remarque. — D'après le mode de transformation précédent, quand une droite de la figure Σ est parallèle à l'axe Ox, son point corrélatif est son point de rencontre avec l'axe Oy.

Toutes les droites de cette même figure, parallèles à une direction quelconque, ont leurs points corrélatifs, dans Σ′, situés sur une parallèle à Oy, laquelle sera dite *ligne de rappel* relative à cette direction.

2. **Propriété métrique relative aux figures corrélatives Σ et Σ′.** — *Le segment* AB *intercepté sur une droite* AM,

dans la figure Σ, *par deux autres* AP *et* BQ *ayant* P′ *et* Q′ *pour points corrélatifs respectifs dans la figure* Σ′, *est égal, dans cette dernière, au segment* SR *intercepté, par les deux droites* M′P′ *et* M′Q′ *sur la parallèle* TR, *à l'axe* Oy, *menée par le point* T *tel que le segment* M′T, *parallèle à* Ox', *soit égal au rayon* O_0M_0 *parallèle à* AM.

Démonstration. — Soient P et Q les points de rencontre respectifs des deux droites AP et BQ avec l'axe Oy; menons par P′ une parallèle à Oy jusqu'à sa rencontre en U avec MM′. Les deux triangles semblables MAP et $M_0O_0P_0$ donnent

$$\frac{AM}{MP} = \frac{O_0M_0}{M_0P_0}.$$

De même, la similitude des deux triangles UM′P′ et TM′S donne

$$\frac{TS}{UP'} = \frac{M'T}{M'U};$$

mais, comme

$$MP = UP', \qquad O_0M_0 = M'T$$

et

$$M_0P_0 = PP' - MM' = M'U,$$

on en déduit

$$TS = AM.$$

De même, pour le segment BM, on aura

$$TR = BM$$

et, par suite,

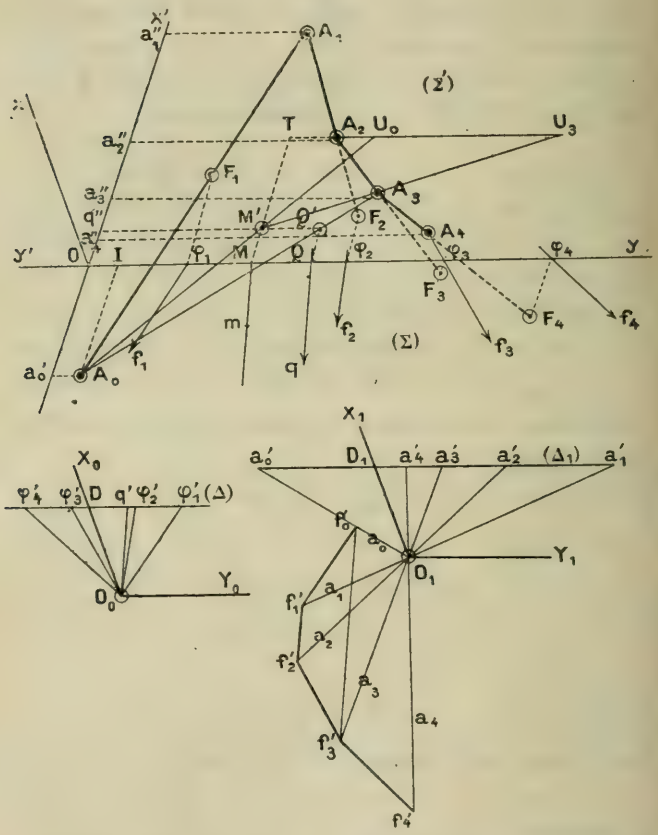
$$SR = AB.$$

II. — FUNICULAIRES CORRÉLATIFS.

3. **Cas général d'un système de forces non concourantes.** — Considérons un système de forces $\varphi_1 f_1$, $\varphi_2 f_2$,

$\varphi_3 f_3$, $\varphi_4 f_4$ (*fig.* 2) dont les lignes d'action sont supposées appartenir à une figure plane Σ.

Fig. 2.



Construisons à côté de cette figure un faisceau de droites ($O_0 . \varphi'_1 \varphi'_2 \varphi'_3 \varphi'_4$) respectivement parallèles à ces lignes d'action. Rapportons la figure Σ à deux axes (Ox, Oy) tels que Oy rencontre ces mêmes lignes d'action en des points accessibles φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, et soit parallèle à une droite arbitraire (Δ), laquelle coupe

aussi, en des points accessibles φ'_1, φ'_2, φ'_3, φ'_4, les droites du faisceau $(O_0 . \varphi'_1 \varphi'_2 \varphi'_3 \varphi'_4)$.

Transportons les axes (Ox, Oy) parallèlement à eux-mêmes en (O_0X_0, O_0Y_0), et soit D le point de rencontre de l'axe O_0X_0 avec la droite (Δ).

Si l'on porte, en tenant compte des signes, les segments $D\varphi'_1$, $D\varphi'_2$, $D\varphi'_3$, $C\varphi'_4$ respectivement en φ_1F_1, φ_2F_2, φ_3F_3, φ_4F_4 sur les parallèles menées à l'axe Ox' par les points φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, les points F_1, F_2, F_3, F_4 appartiendront, d'après le n° 1, à une figure Σ' corrélative de Σ, et représentant les points corrélatifs des droites f_1, f_2, f_3, f_4 de la figure Σ.

Cela posé, considérons le polygone dynamique $f'_0 f'_1 f'_2 f'_3 f'_4$ des forces ci-dessus et supposons que la figure Σ soit un polygone funiculaire correspondant à ces forces et à un pôle O_1 et ayant son côté initial qui rencontre en un point I l'axe Oy.

Désignons par a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 les rayons polaires issus du pôle O_1 et aboutissant aux sommets f'_0, f'_1, f'_2, f'_3, f'_4 du polygone dynamique; appelons (a_0), (a_1), (a_2), (a_3), (a_4) les côtés du polygone funiculaire Σ respectivement parallèles à ces rayons polaires. Proposons-nous de construire, au moyen de la transformation précédente, le polygone corrélatif de ce funiculaire sans recourir à ce dernier.

A cet effet, déterminons d'abord les coefficients angulaires des côtés du funiculaire Σ. Pour cela, transportons les axes (Ox, Oy) parallèlement à eux-mêmes en (O_1X_1, O_1Y_1), en prenant comme nouvelle origine le pôle O_1. Prolongeons les rayons polaires a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 jusqu'à leurs rencontres respectives en a'_0, a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 avec la parallèle (Δ_1), à O_1Y_1, menée par le point D_1 de O_1X_1 tel que $O_1D_1 = OD$.

Les distances des points a'_0, a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 au

point D_1 représentent les coefficients angulaires des côtés ci-dessus (a_0), (a_1), ..., (a_4). Portons ces points respectivement en a''_0, a''_1, a''_2, a''_3, a''_4 sur l'axe Ox' en faisant coïncider D_1 avec l'origine O.

D'après le n° 1, les points corrélatifs A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 des côtés (a_0), (a_1), ..., (a_4) du funiculaire Σ sont situés respectivement sur les parallèles menées par les points a''_0, a''_1, a''_2, a''_3, a''_4 à Oy, lesquelles constituent les lignes de rappel respectivement relatives aux directions de ces côtés.

A présent, comme nous savons qu'à un système de trois droites concourantes de ce funiculaire correspondent trois points alignés, dans la figure Σ', et que la parallèle IA_0 menée par I à Ox' coupe la ligne de rappel a''_0A_0 relative au rayon a_0, au sommet A_0 corrélatif du côté initial (a_0), nous pourrons construire aisément le polygone corrélatif du funiculaire Σ, en appliquant la marche suivante :

On part du sommet initial A_0 connu, on mène l'alignement $A_0F_1A_1$ jusqu'à sa rencontre en A_1 avec la ligne de rappel a''_1, ensuite on tire l'alignement $A_1F_2A_2$ jusqu'à sa rencontre en A_2 avec la ligne de rappel a''_2, puis l'alignement $A_2F_3A_3$ jusqu'à sa rencontre en A_3 avec la ligne de rappel a''_3, et ainsi de suite, en suivant les remarques I et II du n° 4. On obtient ainsi le polygone $A_0A_1A_2A_3A_4$ corrélatif de Σ. Ce polygone est le *funiculaire corrélatif* dont il s'agit correspondant aux forces ci-dessus, au pôle O_1 et ayant comme sommet initial A_0.

4. **Définition des funiculaires corrélatifs.** — *Les funiculaires corrélatifs correspondant à un système de forces et à un pôle sont des polygones dont les côtés passent par les points corrélatifs de ces forces*

et dont les sommets sont situés sur les parallèles menées à O*y à des distances proportionnelles aux coefficients angulaires des rayons polaires issus de ce pôle et aboutissant aux sommets du polygone dynamique.*

Remarque I. — *A tout rayon polaire qui aboutit à l'intersection de deux forces, dans le polygone dynamique, répond, sur le funiculaire corrélatif, un sommet situé sur la parallèle menée, à l'axe* O*y, à une distance égale au coefficient angulaire de ce rayon.*

Remarque II. — *A trois côtés d'un triangle constitué, dans le polygone dynamique, par une force et deux rayons polaires aboutissant aux extrémités de celle-ci, répondent, dans le funiculaire corrélatif, trois points alignés dont deux sont les deux sommets consécutifs correspondant à ces deux rayons polaires et le troisième est le point corrélatif de cette force.*

5. **Propriétés géométriques des funiculaires corrélatifs.** — *Quand on change de pôle* O_1, *les côtés du funiculaire corrélatif pivotent autour des points corrélatifs* F_1, F_2, F_3, F_4 *des forces.*

Deux funiculaires corrélatifs d'un même système de forces, correspondant à deux pôles distincts, ont leurs sommets correspondants situés sur des droites concourant en un point C *de la ligne de rappel relative à la droite de ces deux pôles* (1).

---

(1) Cette propriété est corrélative de la suivante bien connue : *les côtés correspondants de deux funiculaires ordinaires relatifs à deux pôles se coupent sur un même axe parallèle à la droite unissant ces deux pôles.*

Pour avoir ce point C, il suffit de prendre l'alignement de deux sommets correspondants quelconques des funiculaires corrélatifs considérés; cet alignement coupe, au point C, la ligne de rappel relative à la droite unissant les deux pôles.

6. **Cas particuliers d'un système de forces concourantes ou parallèles.** — Dans le cas d'un système de forces concourantes, les points corrélatifs F_1, F_2, F_3, F_4 des forces sont en ligne droite. Deux funiculaires corrélatifs correspondant à deux pôles distincts sont *homologiques;* ils ont pour *axe d'homologie* la droite des points F_1, ..., F_4 et pour *centre d'homologie* le point C défini ci-dessus.

Dans le cas des forces parallèles, en prenant l'axe Ox parallèle à ces forces, les points corrélatifs de celles-ci sont leurs points de rencontre respectifs avec l'axe Oy, comme nous le verrons sur la figure 3 relative à une application aux poutres droites.

III. — APPLICATION DES FUNICULAIRES CORRÉLATIFS A LA COMPOSITION ET A LA DÉTERMINATION DES MOMENTS STATIQUES DES FORCES.

7. **Composition et équilibre des forces.** — Proposons-nous de déterminer la résultante q (*fig.* 2) d'un nombre quelconque de forces, de trois forces f_1, f_2, f_3 par exemple.

A cet effet, remarquons que cette résultante est représentée, dans le polygone dynamique, en grandeur, direction et sens, par le vecteur $f'_0 f'_3$. Pour qu'elle soit déterminée en position, il suffit d'avoir un point de sa ligne d'action, son point de rencontre Q avec l'axe Oy par exemple.

Or, comme les deux côtés (a_0) et (a_3) du funiculaire Σ se coupent sur cette résultante, le point corrélatif Q' de cette dernière est le point de rencontre de l'alignement A_0A_3 des points corrélatifs de ces deux côtés avec la ligne de rappel $q''Q'$ relative au vecteur $f'_0f'_3$ de cette résultante. Ce point Q' étant situé aussi sur la parallèle QQ' à Ox', il s'ensuit que, pour avoir le point Q, il suffit de mener par O une parallèle au vecteur $f'_0f'_3$ jusqu'à sa rencontre en q' avec la droite (Δ), ensuite de porter Dq' en Oq'' sur Ox' et de projeter en Q, suivant Ox', le point de rencontre Q' de l'alignement A_0A_3 avec la ligne de rappel $q''Q'$ relative à $f'_1f'_3$.

De là découle une généralisation de la remarque II du n° 4.

Remarque. — *Aux trois côtés d'un triangle constitué, dans le polygone dynamique, par le vecteur de la résultante d'un nombre quelconque de forces et par les deux rayons polaires aboutissant aux extrémités de ce vecteur, répondent dans le funiculaire corrélatif trois points alignés dont deux sont les deux sommets correspondant à ces deux rayons polaires et le troisième est le point corrélatif de cette résultante.*

Condition d'équilibre graphique des forces. — *A un système de forces dont le polygone dynamique se ferme, correspond un funiculaire qui se ferme aussi.*

8. **Moments statiques des forces.** — Soit à déterminer le moment des trois forces f_1, f_2, f_3 par rapport à un point quelconque m de la figure 2.

Nous savons que ce moment est égal au produit de la distance polaire du vecteur $f'_0 f'_3$ par le segment intercepté, sur la parallèle en M à ce vecteur, par les deux côtés (a_0), (a_3) du funiculaire Σ. Or, ce segment est égal, dans le funiculaire corrélatif Σ', au segment U_0U_3 qu'on obtient, d'après le n° 2, en procédant comme suit :

On détermine le point corrélatif M′ de la parallèle mM à $f'_0 f'_3$, on joint ce point M′ aux deux sommets A_0, A_3 correspondant aux rayons polaires aboutissant aux extrémités du vecteur $f'_0 f'_3$, et l'on porte sur l'abscisse MM′ une longueur M′T égale au rayon $O_0 q'$ parallèle à $f'_0 f'_3$. Les deux droites $M'A_0$ et $M'A_3$ interceptent, sur la parallèle TU_0 à Oy, un segment U_0U_3 dont le produit par la distance polaire du vecteur $f'_0 f'_3$ est le moment demandé.

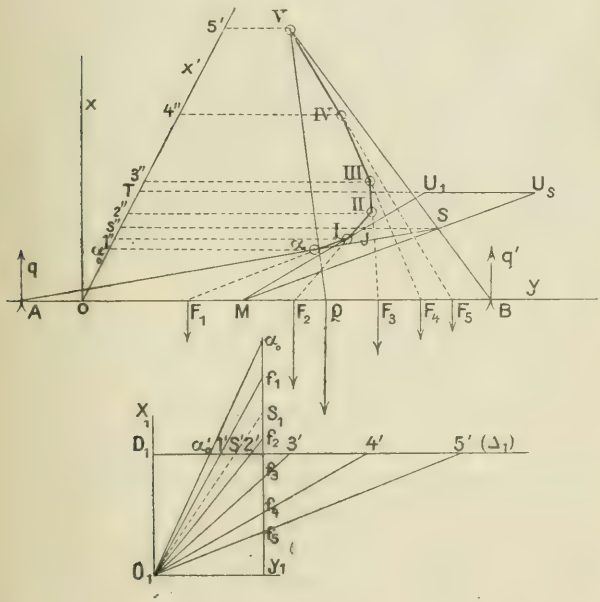
IV. — APPLICATION AU CALCUL DES POUTRES A APPUIS SIMPLES.

9. **Funiculaires corrélatifs.** — Considérons une poutre reposant librement sur deux appuis A et B (*fig.* 3) et supportant en des points F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 un système quelconque de charges isolées f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Cherchons à déterminer au moyen des funiculaires corrélatifs la résultante de ces charges, les réactions d'appuis, les moments fléchissants et efforts tranchants développés dans cette poutre.

A cet effet, prenons AB pour axe Oy, l'axe Ox parallèle à ces forces et une direction arbitraire pour l'axe Ox'. Choisissons un pôle O_1, à côté du polygone dynamique $z_0 f_1 f_2 f_3 f_4 f_5$ de ces charges, lequel se réduit ici à une droite. Menons O_1X_1 parallèle à Ox,

et coupons cet axe et les rayons polaires $O_1\alpha_0$, O_1f_1, O_1f_2, ..., O_1f_5 par une parallèle (Δ_1) à Oy, respectivement en des points D_1, α'_0, $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$ que nous porterons en O, α''_0, $1''$, $2''$, $3''$, $4''$, $5''$ sur l'axe Ox'. Les parallèles menées par ces derniers points à l'axe Oy

Fig. 3.



constituent les lignes de rappel relatives aux rayons polaires ci-dessus. A présent, remarquons que les points F_1, F_2, ... F_5 sont corrélatifs des lignes d'action des charges considérées agissant en ces mêmes points. Pour construire un funiculaire corrélatif $(\alpha, I, II, III, IV, V)$ relatif à un pôle O_1, on part du sommet initial, pris arbitrairement sur la ligne de rappel α''_0 relative au rayon initial $O_1\alpha_0$, et l'on tire, d'après les remarques I et II du n° 4, les alignements

consécutifs $F_1 \alpha$ I, F_2 I II, F_3 II III, ... qui se coupent sur les lignes de rappel α''_0, $1''$, $2''$, $3''$, $4''$, ... respectivement relatives aux rayons polaires $O_1\alpha_0$, $O_1 f_1$, $O_1 f_2$, ...

10. **Résultante des charges.** — Remarquons que le point corrélatif de la ligne d'action de cette résultante est son point de rencontre Q avec l'axe Oy, et que ce point est situé, d'après la remarque du n° 8, sur l'alignement des deux sommets extrêmes correspondant aux polaires aboutissant aux extrémités de cette résultante dans le polygone dynamique. Il s'ensuit qu'on obtient immédiatement cette résultante en menant l'alignement αV qui coupe AB en un point Q de sa ligne d'action.

11. **Réactions des appuis.** — Désignons par q et q' les réactions développées respectivement en A et B; soit $O_1 S_1$ le rayon polaire qui détermine sur $\alpha_0 f_5$ les vecteurs $\alpha_0 S_1 = q$ et $S_1 f_5 = q'$ de ces réactions. Appelons S le sommet, dans le funiculaire corrélatif, répondant à ce rayon polaire.

Ce sommet est le point de rencontre des deux droites Aα et BV, en raison de ce que A et B sont les points corrélatifs respectifs des lignes d'action des réactions q et q' développées en ces points, et de ce que, aussi, d'après la remarque du n° 8, aux trois côtés du triangle $S_1 \alpha_0 O_1$ correspondent les trois points alignés A, α et S, et aux trois côtés du triangle $f_5 S_1 O_1$ correspondent aussi les trois points alignés B, S et V.

En menant la parallèle Ss'' à Oy jusqu'à sa rencontre en s'' avec $O'x$, et en portant Os'' en $D_1 S'$ sur la droite (Δ_1), on obtient le rayon $O_1 S' S_1$ qui détermine sur $\alpha_0 f_5$ les réactions ci-dessus.

12. **Moments fléchissants.** — Cherchons le moment fléchissant développé en un point quelconque M de AB. Ce moment est produit par les forces agissant sur le tronçon AM, savoir : la réaction q et la charge f concentrée en F_1 ayant comme résultante, dans le polygone dynamique, le vecteur $S_1 f_1$.

Pour avoir ce moment, on appliquera le n° 8 : on porte $O_1 D_1$ en OT sur l'axe Ox', et l'on joint le point M aux deux sommets I et S correspondant aux rayons polaires $O_1 f_1$ et $O_1 S_1$ aboutissant aux extrémités du vecteur ci-dessus $S_1 f_1$. Le produit de la distance polaire $O_1 Y_1$ par le segment $U_1 U_s$ intercepté, sur la parallèle TU_1 à Oy, par les deux droites MI et MS, est le moment demandé.

Remarque. — Quel que soit le point M, le segment représentatif du moment développé en ce point est déterminé sur une même droite fixe TU_1. Au lieu de ce segment $U_1 U_s$, on pourrait prendre le segment JS intercepté sur la parallèle $s''S$ à Oy par les deux droites MI et MS, à condition d'adopter comme nouvelle distance polaire $\delta = \frac{OY_1 \times Os''}{OT}$. Dans ce cas, tous les segments représentatifs des moments ont même origine S.

13. **Efforts tranchants.** — Le vecteur $S_1 f_1$, dans le polygone dynamique, représente l'effort tranchant développé en M.

14. **Nouvelle représentation graphique des moments fléchissants au moyen des funiculaires corrélatifs.** — Si l'on prend un second pôle O_2 à l'intersection de l'axe $O_1 X_1$ avec la parallèle menée par T à l'axe Oy, le sommet de fermeture S, dans le polygone corré-

latif relatif à ce pôle, sera rejeté à l'infini suivant Ox'. Dans ce cas, le moment fléchissant en un point M sera représenté par le coefficient angulaire, par rapport aux axes (Ox', Oy'), de la droite qui joint ce point M au sommet I correspondant au rayon polaire aboutissant au point commun de deux forces consécutives comprenant dans leur intervalle ce point M.

On construit ce funiculaire aisément, en remarquant, d'après le n° 5, qu'il constitue avec celui correspondant au pôle O_1 deux figures *homologiques* ayant Oy pour *axe d'homologie*, et, pour *centre d'homologie*, le point de rencontre de AB avec la parallèle menée par le sommet S à l'axe Ox'.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1906).

Sujets des compositions.

Mathématiques élémentaires.

I. Étant donné un triangle ABC, trouver sur la droite BC un point D tel qu'un cercle (β), inscrit ou exinscrit au triangle ABD et ayant son centre sur la bissectrice intérieure de l'angle B du triangle donné, soit tangent à un cercle (γ), inscrit ou exinscrit au triangle ACD et ayant son centre sur la bissectrice intérieure de l'angle C du triangle donné. Même question en considérant les angles extérieurs en B et C, ou encore un angle intérieur et un angle extérieur.

II. On donne deux cercles (β) et (γ) tangents *extérieurement* et soient SX, SX' les tangentes communes extérieures à ces cercles. Un point A décrit la tangente commune intérieure ZZ' et l'on mène de ce point les secondes tangentes

aux cercles (β), (γ), lesquelles rencontrent SX en B et C, SX′ en B′, C′.

1° Les centres des deux cercles étant β et γ, le point d'intersection M des droites $B\beta$ et $C\gamma$ et le point d'intersection M′ des droites $B'\beta$ et $C'\gamma$ décrivent deux droites Δ, Δ'.

2° Le quadrilatère $M\beta M'\gamma$ est inscriptible à un cercle et les deux droites MM′ et $\beta\gamma$ sont conjuguées par rapport à ce cercle.

3° L'enveloppe de MM′ est une hyperbole ; trouver le point de contact de MM′ avec son enveloppe.

4° Le cercle $A\beta\gamma$ est orthogonal au cercle $M\beta M'\gamma$. Ce même cercle $A\beta\gamma$, le cercle de centre M tangent aux trois côtés du triangle ABC et le cercle de centre M′ tangent aux trois côtés du triangle AB′C′ ont, deux à deux, même axe radical.

5° Désignons par O le milieu de $\beta\gamma$, par D et D′ les points où ZZ′ rencontre SX et SX′ et par ω le centre du cercle $A\beta\gamma$.

On a

$$\frac{MO}{OD} = \frac{D'O}{OM'} = \frac{AD'}{AD},$$

$$\frac{1}{\omega O} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{AD'}.$$

Mathématiques spéciales.

On considère trois axes Ox, Oy, Oz formant un trièdre trirectangle et les paraboloïdes ayant pour équation, par rapport à ces axes :

$$x^2 + (y - az)^2 + 2\lambda z - R^2 = 0,$$

a et R étant des constantes et λ un paramètre variable.

I. Par chacun des points P, P′ où l'un de ces paraboloïdes rencontre Oz, on mène la sphère qui contient les sections circulaires réelles passant par ce point ; trouver le lieu de l'intersection des deux sphères relatives à P et P′ : montrer que le plan radical de ces deux sphères est parallèle à un plan fixe et passe par le milieu de PP′. Par chacun des points M communs à ces deux sphères passe une troisième sphère qui correspond à un autre paraboloïde ; quel est le lieu de M si cette sphère est fixe ?

II. Le lieu des sections circulaires rencontrant Oz se compose, en général, d'un cône du second degré et d'une surface du troisième degré; montrer que cette dernière peut être engendrée par un cercle assujetti à rencontrer l'axe Oz et deux autres droites réelles fixes D, D′ auxquelles il est constamment orthogonal.

III. Trouver les plans qui coupent la surface précédente suivant des cubiques circulaires; montrer que toute sécante menée dans un tel plan, par le point A où il rencontre Oz, coupe la cubique en des points S et S′ tels que le produit $\overline{AS}.\overline{AS'}$ soit constant si le plan est fixe.

Aux points S, S′, on mène les normales à la cubique; trouver le lieu de leur point de rencontre quand la sécante SAS′ varie ainsi que le plan de la courbe.

Composition sur le calcul différentiel et intégral.

Soient Ox, Oy, Oz trois axes de coordonnées formant un trièdre trirectangle de sommet O; on désigne par M un point quelconque d'une surface, par P et Q les points où le plan tangent à cette surface au point M rencontre respectivement les axes Ox, Oy.

1° Déterminer les surfaces, autres que les cônes de sommet O, satisfaisant à la condition que les deux triangles OMP, OMQ soient constamment équivalents entre eux. Ces surfaces sont les solutions de l'une ou de l'autre de deux équations aux dérivées partielles (E_1), (E_2), et se partagent en deux catégories, la première comprenant les surfaces S_1 solutions de (E_1) et la deuxième les surfaces S_2 solutions de (E_2). Peut-on passer d'une surface S_1 à une surface S_2 par une variation réelle et continue des paramètres qui entrent dans l'équation de la première?

Quelle peut être la trace sur le plan xOy d'une surface S_1 ou d'une surface S_2?

2° On désigne par (E) l'une des deux équations (E_1) ou (E_2), par γ une caractéristique de cette équation (E) et par Γ le cône ayant pour sommet l'origine O et pour directrice cette caractéristique γ. M étant un point de l'espace, on trace par ce point les deux droites D et D′ respectivement perpen-

diculaires aux plans de sections circulaires du cône Γ qui passe par ce point M.

On suppose que M décrit un contour plan fermé C ne se coupant pas et ne rencontrant aucun des axes Ox, Oy et l'on suit séparément les variations correspondantes des droites D et D'. Indiquer, suivant la nature du contour C, la situation des positions finales de ces droites lorsqu'on les compare aux positions initiales, et le nombre de lignes fermées distinctes décrites par les traces de ces droites sur un plan parallèle à celui du contour C.

3° Sur une surface S, solution de l'une des équations (E_1) ou (E_2), on trace les lignes L conjuguées des caractéristiques γ; si l'on considère toutes les surfaces S passant par un même point M, quel est le lieu des lignes L assujetties à passer également par ce point M?

Peut-on trouver une famille F_1 composée de surfaces S_1 et une famille F_2 composée de surfaces S_2, telles que toute surface de la première coupe toute surface de la seconde suivant une ligne L? montrer que le problème est possible d'une infinité de manières et qu'on peut fixer arbitrairement une des surfaces de la famille F_1.

4° En désignant comme précédemment par γ une caractéristique de l'une des deux équations (E_1) ou (E_2), on considère dans l'espace des surfaces quelconques, telles cependant que chacune d'elles soit rencontrée en un seul point par chaque caractéristique γ; on appelle points correspondants sur ces surfaces, des points situés sur une même caractéristique et portions correspondantes, des portions dont les points se correspondent. Sur une de ces surfaces on prend une portion finie Σ qui n'est rencontrée par aucun des axes Ox, Oy et l'on forme pour cette portion l'intégrale de surface

$$I = \int\int \left(\frac{\cos\alpha}{A} \pm \frac{\cos\beta}{B} \right) d\sigma,$$

$d\sigma$ étant un élément d'aire de Σ, A et B ses distances aux axes Ox, Oy, α et β les angles formés avec ces axes par la normale à l'élément.

Démontrer que, si l'on choisit convenablement le signe + ou le signe — suivant que les caractéristiques γ appartiennent à l'une ou à l'autre des équations (E_1) ou (E_2), la valeur de

l'intégrale I reste la même lorsqu'on l'étend à des portions correspondantes de surfaces différentes. Dans ces conditions, évaluer l'intégrale I en supposant que les caractéristiques γ rencontrant la portion Σ sont toutes celles dont les plans restent à une distance du point O au plus égale à une limite donnée l et telles, de plus, que la valeur absolue de l'angle formé avec Ox par la tangente en un point quelconque de l'une d'elles soit comprise entre deux limites λ et $\frac{\pi}{2} - \lambda$ $\left(0 < \lambda < \frac{\pi}{4}\right)$.

5° Étant donnée une surface fixe Σ_0, on demande de déterminer une autre surface Σ telle que les aires de deux portions correspondantes quelconques prises respectivement sur Σ_0 et Σ aient pour perpectives des aires équivalentes entre elles, lorsqu'on prend le point O comme point de vue et un plan parallèle au plan xOy comme plan du Tableau. Si l'équation de cette surface Σ est supposée sous la forme $F(x, y, z) = 0$, montrer que l'équation aux dérivées partielles à laquelle elle satisfait peut être intégrée par quadratures lorsqu'on prend comme nouvelles variables d'une part les deux paramètres qui déterminent chacune des caractéristiques γ, d'autre part une fonction homogène et de degré zéro de x, y, z.

Composition sur la Mécanique.

Un corps de révolution Σ homogène pesant, analogue à une toupie, repose par une pointe S sur un plan horizontal fixe H; la pointe glisse sans frottement sur ce plan, le système n'est assujetti à aucune autre liaison et il n'est soumis qu'à l'action de la pesanteur.

On désigne par G le centre de gravité de Σ et par l la distance SG: on définit le mouvement du corps par la variation des angles d'Euler, θ, ψ, φ qui sont respectivement l'angle de SG avec la verticale ascendante, l'angle de précession et l'angle de rotation propre; on désigne par r, q, p les composantes de la rotation instantanée suivant l'axe, l'horizontale perpendiculaire à l'axe et une perpendiculaire commune à ces deux droites, par μ et μ' les moments de rotation par rapport à l'axe et à la verticale du point G.

1° Écrire les équations du mouvement de Σ. En supposant qu'au début du mouvement la dérivée de θ par rapport au temps est nulle, à quelle condition doivent satisfaire les données initiales pour que θ conserve indéfiniment une valeur constante?

2° *Application numérique.* — On suppose que le corps Σ a toute sa masse concentrée sur une circonférence homogène dont le plan est perpendiculaire à l'axe, le centre G sur l'axe et le rayon égal à 10^{cm}; la distance SG ou l est égale à 20^{cm}, et l'intensité g de la pesanteur est prise égale à 980 C. G. S. La position initiale de l'axe SG est inclinée sur la verticale de l'angle $\frac{\pi}{6}$, et le mouvement initial est le mouvement résultant de deux rotations, l'une autour d'un axe vertical passant par G, avec une vitesse angulaire correspondant à n tours par seconde, l'autre autour de l'axe SG avec une vitesse angulaire correspondant à 50 tours par seconde. On demande de calculer la valeur numérique qu'il faut attribuer à n pour que θ conserve indéfiniment la même valeur qu'à l'instant initial.

3° Le corps Σ et les données initiales sont supposés quelconques, tels cependant que le point G se déplace suivant une verticale et que la pointe S repose constamment sur le plan H. A un certain moment on approche de Σ une droite rigide D que l'on maintient fixe, et cette droite D est choquée par le corps Σ à la manière des corps élastiques; on suppose qu'au moment du choc la droite D est perpendiculaire au plan vertical contenant SG, et l'on désigne par c sa cote au-dessus du plan H; on l'écarte après le choc de façon que le mouvement ultérieur de Σ ne soit pas gêné.

Si M_1 et M_2 sont les mouvements du corps Σ avant et après le choc, démontrer que les limites entre lesquelles varie θ sont plus étroites dans M_2 que dans M_1. Cette conclusion subsisterait-elle encore dans le cas où l'élasticité des corps choquants serait imparfaite?

4° On suppose que l'élasticité est parfaite, et l'on donne le mouvement M_1; peut-on choisir l'angle θ que fait, au moment du choc, l'axe SG avec la verticale pour que cet angle reste ensuite constant pendant le mouvement M_2? Quelles devront être les autres circonstances du choc? Indiquer, en particulier, suivant quelles lignes pourra s'exercer la percussion pro-

duite par le choc au point de contact de D et de Σ, et en déduire les positions que l'on peut attribuer à la droite D.

5° On considère dans ce qui suit le cas où le corps Σ comprend une tige infiniment mince dirigée suivant son axe et où le choc se fait en un point de cette tige dans les conditions du 1°; montrer qu'il existe en général deux positions possibles D′, D″ de la droite D et déterminer ces positions. En supposant que l'on ait effectué, lorsque D occupe la position D′, le calcul des percussions au moment du choc et des éléments du mouvement M_2, quelles modifications faudrait-il apporter aux résultats de ce calcul lorsque l'on fait occuper à la droite D l'autre position D″?

6° Comment doivent être choisies les circonstances du mouvement M_1 au moment du choc pour que l'une des positions D′ ou D″ soit dans le plan H? Montrer que, si l'on place D dans l'autre position, le choc ne produit aucune percussion sur la pointe S. La distribution des masses de Σ peut-elle être telle que cette circonstance ne se produise pour aucun mouvement M_1?

7° Dans les conditions générales énoncées au 5°, discuter le nombre et la position de celles des droites D′ ou D″ pour lesquelles le choc n'a pas pour effet de soulever la pointe S; examiner séparément le cas où, au moment du choc, l'axe du corps Σ dans le mouvement M_1 s'approche de la verticale, et le cas où il s'en éloigne.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2046.

(1905, p. 479.)

Soit $\Delta(\lambda, \mu, \nu)$ *la droite de Simson relative à un point* O *du cercle* ABC. *Les parallèles à* OA, OB, OC *menées par l'orthocentre* O′ *de* ABC *coupent* BC, CA, AB *en* λ', μ', ν' *et l'on a la droite* $\Delta'(\lambda', \mu', \nu')$. *Les droites* Δ, Δ' *se coupent sur le cercle d'Euler au milieu de* OO′. (P. Sondat.)

SOLUTION

Par A. Droz-Farny.

On sait que la droite de Simson du point O rencontre la droite OO′ en son point milieu, point du cercle d'Euler. Il suffira donc de démontrer que Δ' passe aussi par ce point O″.

Construisons la droite $O''\lambda'$ qui coupe OA en α. Il suffira pour cela de mener une droite B′C′ symétrique de BC par rapport à O″. Cette droite B′C′ rencontre OA en α et la droite $\alpha O''$ passe par λ'. Il est facile de démontrer que $O''\lambda'$ contient aussi μ' et ν'.

Soient A′, B′, C′ les symétriques de A, B, C par rapport à O″. Les côtés B′C′, A′C′, A′B′ coupent respectivement les droites OA, OB, OC en α, β, γ.

O″ appartenant au cercle d'Euler du triangle ABC, il existe une hyperbole équilatère passant par A, B, C, O′ et ayant O″ comme centre. Cette hyperbole contiendra donc les points A, B, C, O′, A′, B′, C′, O. Les deux triangles ABC et A′B′C′ inscrits dans la courbe sont homologiques, O″ étant le centre d'homologie. Il suffira donc, pour démontrer que les points $\alpha\beta\gamma O'$ *ou* $\lambda'\mu'\nu'O''$ sont en ligne droite d'appliquer le théorème de M. Aubert (*Nouvelles Annales*, 3e série, t. VIII).

Si deux triangles ABC, A′B′C′ inscrits dans une conique sont homologiques et, si l'on prend un point O quelconque sur la conique, les points d'intersection α, β, γ, OA et B′C, OB et A′C′, OC et A′B′ sont situés sur une même ligne droite Δ' passant par le centre d'homologie O″.

Autre solution de M. Lez.

2048.

(1906, p. 480.)

Étant donné un triangle ABC, *on mène par le milieu* α *de la hauteur* AA′ *une demi-droite faisant avec* αA′ *un angle égal à la différence des angles* $\widehat{BAA'}$, $\widehat{A'AC}$ *et située dans le plus grand de ces deux angles. Cette demi-droite et les deux demi-droites analogues se coupent en un même point.* (A. Rogoff.)

SOLUTION

Par M. Letierce.

Si l'on désigne par O le centre du cercle circonscrit à ABC, on sait que AO et AA′ sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle BAC; par suite la demi-droite menée par α est parallèle à AO, c'est-à-dire perpendiculaire à B′C′.

Si, par A′, on mène la parallèle à la demi-droite considérée, on a une hauteur du triangle A′B′C′; par conséquent, les demi-droites de l'énoncé se coupent au milieu I de OH, H étant le point de concours des hauteurs des triangles A′B′C′.

C. Q. F. D.

Remarque. — Si α', β', γ' sont les milieux de OA, OB, OC, les droites $A'\alpha'$, $B'\beta'$, $C'\gamma'$ se coupent au point I, en leur milieu; de plus, le point I est aussi le centre du cercle inscrit au triangle A″B″C″, ayant pour sommets les milieux des côtés du triangle A′B′C′ (*voir* Rouché, *Traité de Géométrie :* Géométrie du triangle).

2053.

(1906, p. 528.)

La conique, qui touche les côtés d'un triangle donné ainsi que les perpendiculaires élevées du centre de son cercle inscrit aux droites qui joignent ce point aux extrémités de l'un de ces côtés, est tangente au cercle inscrit au triangle. (*Canon.*)

SOLUTION

Par M. Letierce.

Soient O le centre du cercle inscrit au triangle ABC donné, OD et OE les perpendiculaires élevées de O aux droites OA et OB.

Considérons le faisceau tangentiel Γ des coniques défini par le cercle O et les points A et B, c'est-à-dire des coniques tangentes aux droites CA, CB, et en γ au cercle inscrit (γ point de contact de AB et du cercle O).

(OA, OB) et les droites isotropes passant par O étant deux couples de rayons homologues de l'involution déterminée par les tangentes issues de O aux coniques Γ, on en conclut que

tous les couples de rayons homologues de l'involution considérée, sont formés par les droites également inclinées sur les bissectrices des angles des droites OA et OB.

En particulier, OD et OE sont homologues; donc, parmi les coniques Γ, il en est une tangente à ces deux droites.

Ce qui démontre la proposition.

Remarque. — La démonstration subsiste si, au lieu du cercle inscrit, on considère une conique tangente aux trois côtés du triangle, le centre du cercle étant remplacé par un foyer de la conique. On peut aussi remplacer les perpendiculaires à OA et OB par deux droites également inclinées sur les bissectrices des angles des droites OA et OB et énoncer la proposition plus générale suivante :

Étant donnée une conique de foyer O *inscrite dans un triangle* ABC, *si l'on désigne par* OD *et* OE *deux droites également inclinées sur les bissectrices des angles des droites* OA *et* OB, *la conique, tangente aux côtés du triangle et aux droites* OD *et* OE, *est tangente à la conique donnée.*

Autres solutions par MM. Droz-Farny et Laureaux.

QUESTIONS.

2078. On appelle u_n le $n^{\text{ième}}$ coefficient du développement de $\frac{1}{1-3x-3x^2-x^3}$ et v_n le $n^{\text{ième}}$ coefficient du développement de $\frac{1}{1+3x-3x^2-x^3}$; démontrer qu'en prenant

$$X = u_{n+1}, \qquad Z = v_n,$$
$$Y = u_n + u_{n+1}, \qquad T = v_n + v_{n+1}$$

on a

$$2(X^3 + Z^3) = Y^3 + T^3.$$

R. Amsler.

2079. Si l'on pose

$$\pi - y = \sqrt{1 - a^2} \int_0^x \frac{dx}{1 + a \cos x},$$

on a aussi

$$\pi - x = \sqrt{1 - a^2} \int_0^y \frac{dy}{1 + a \cos y}.$$

(G. F.)

2080. On coupe le triangle ABC par la droite $\Delta(\lambda\mu\nu)$.

I. Les points I, H, K, symétriques des sommets A, B, C par rapport aux segments $\mu\nu$, $\lambda\nu$, $\lambda\mu$, sont situés sur une droite Δ_1.

II. Si Δ enveloppe une conique inscrite à ABC, Δ_1 tourne autour d'un point fixe.

III. Si Δ est une droite de Simson, Δ_1 est perpendiculaire à Δ. (P. Sondat.)

[D3a]

SUR LE CALCUL D'UNE FONCTION ANALYTIQUE DONT ON CONNAIT LA PARTIE REELLE;

PAR M. R. ALEZAIS.

Soit P une fonction réelle de x et de y; on se propose d'en trouver une autre Q telle que $P + iQ$ soit fonction de $z = x + iy$, ou, ce qui revient au même, de trouver la fonction $f(z)$ dont P est la partie réelle. Les méthodes généralement employées nécessitent une intégration que l'on peut facilement éviter en s'appuyant sur la forme générale des intégrales de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0,$$

dont P et Q doivent être solutions.

Je désigne par t la conjuguée de z, de sorte que

$$x = \frac{z+t}{2}, \qquad y = \frac{z-t}{2i}.$$

THÉORÈME. — *Si l'on a*

$$P(x, y) = \psi(z, t)$$

et si t_0 est une constante telle que $\psi(z, t_0)$ ne soit pas infinie, on a

$$f(z) = 2\psi(z, t_0) + c, \tag{1}$$

où c est une constante arbitraire.

En effet, la fonction P étant harmonique peut se

mettre sous la forme

$$P = \varphi(z) + \varphi_1(t),$$

et, comme de plus elle est réelle, φ_1 ne peut différer de la conjuguée de φ que par une constante réelle. On peut donc écrire

$$P = \varphi(z) + \varphi_1(t) + \text{const.}$$

en supposant φ_1 la conjuguée de φ. Q étant aussi une fonction harmonique réelle, on a de même

$$Q = \psi(z) + \psi_1(t) + \text{const.},$$

où ψ_1 est la conjuguée de ψ. Il en résulte

$$f(z) = \varphi(z) + \varphi_1(t) + i[\psi(z) + \psi_1(t)] + \text{const.}$$

Mais le second membre doit être fonction de z seul; il faut donc que l'on ait

$$\varphi_1(t) + i\psi_1(t) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\psi_1(t) = -\frac{1}{i}\varphi_1(t), \qquad \psi(z) = \frac{1}{i}\varphi(z).$$

On a donc

$$f(z) = 2\varphi(z) + \text{const.}$$

Enfin, de l'identité

$$\psi(z, t) = \varphi(z) + \varphi_1(t) + \text{const.},$$

il résulte que $\psi(z, t_0)$, supposé fini, ne diffère de $\varphi(z)$ que par une constante, et l'on a bien la formule (1).

Il est à remarquer que, P étant entièrement déterminée, la partie imaginaire de c est seule arbitraire; on détermine sa partie réelle en donnant à x et à y un système particulier de valeurs dans P et dans $2\psi(z_0, t_0) + c$. Cela fait, je désignerai par iA, A réel, la constante arbitraire.

Voici quelques exemples donnés aux examens de la licence :

1° $P = \dfrac{2\sin 2x}{e^{2y} - e^{-2y} - 2\cos 2x}$ (Grenoble, nov. 1884).

$$\psi(z, t) = \frac{\sin(z+t)}{\cos(z-t) - \cos(z+t)}, \qquad \psi\left(z, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos z}{2\sin z}.$$

P s'annule avec z; on a

$$f(z) = \cot z + iA.$$

2° $P = \dfrac{x(1 - x^2 - y^2)}{1 - 2(x^2 - y^2) + (x^2 + y^2)^2}$ (Rennes, nov. 1888).

$$\psi(z, t) = \frac{\dfrac{z+t}{2}\left[1 - \dfrac{(z+t)^2}{4} + \dfrac{(z-t)^2}{4}\right]}{1 - 2\left[\dfrac{(z+t)^2}{4} + \dfrac{(z-t)^2}{4}\right] + \left[\dfrac{(z+t)^2}{4} - \dfrac{(z-t)^2}{4}\right]^2},$$

$$\psi(z, 0) = \frac{z}{2(1 - z^2)}.$$

P s'annule avec z; on a

$$f(z) = \frac{z}{1 - z^2} + iA.$$

3° $P = \dfrac{\cos 2x + e^{2y}}{2\cos 2x + e^{2y} + e^{-2y}}$ (Montpellier, juillet 1893).

$$\psi(z, t) = \frac{\cos(z+t) + \cos(z-t) - i\sin(z-t)}{2[\cos(z+t) + \cos(z-t)]},$$

$$\psi(z, 0) = \frac{2\cos z - i\sin z}{4\cos z} = \frac{1}{2} - \frac{i}{4}\operatorname{tang} z.$$

P se réduit à $\frac{1}{2}$ pour $z = 0$; on a

$$f(z) = \frac{1}{2}[1 - i(\operatorname{tang} z - A)].$$

4° $P = 1 - \operatorname{ch} 2y \cos 2x$ (Nancy, juillet 1893).

$$\psi(z, t) = 1 - \cos(z-t)\cos(z+t), \qquad \psi(z, 0) = \sin^2 z.$$

P s'annule avec z; on a

$$f(z) = 2\sin^2 z + iA.$$

Généralisations. — Soit à déterminer

$$f(z) = P + iQ,$$

sachant que l'on a

$$aP + bQ = \Phi(x, y),$$

a et b étant des constantes réelles.

En raisonnant comme plus haut, on a

$$aP + bQ = (a - bi)\varphi(z) + (a + bi)\varphi_1(t) + \text{const.}$$

Soit

$$\Phi(x, y) = \psi(z, t),$$

il vient

$$\varphi(z) = \frac{\psi(z, t_0)}{a - bi} + \text{const.}$$

et, par suite,

$$f(z) = \frac{2\psi(z, t_0)}{a - bi} + \text{const.}$$

Exemple :

$$P - Q = \frac{\cos x + \sin x - e^{-y}}{2\cos x - e^{y} - e^{-y}} \qquad \text{(Montpellier, nov. 1906).}$$

$$\psi(z, t) = \frac{\cos\frac{z+t}{2} + \sin\frac{z+t}{2} - \cos\frac{z-t}{2} - i\sin\frac{z-t}{2}}{2\left(\cos\frac{z+t}{2} - \cos\frac{z-t}{2}\right)},$$

$$\psi(z, \pi) = \frac{-2\sin\frac{z}{2} + (1+i)\cos\frac{z}{2}}{-4\sin\frac{z}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1-i}{4}\cot\frac{z}{2};$$

on a ici $a - bi = 1 + i$ et, par suite,

$$f(z) = c - \frac{1}{2}\cot\frac{z}{2}.$$

Mais, pour $z = 0$, $P - Q$ se réduit à $\frac{1}{2}$; on a donc en définitive

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \cot\frac{z}{2}\right) + (1 + i)A.$$

D'une manière plus générale, étant donnée une relation

$$F(P, Q, x, y) = 0,$$

on peut l'écrire

$$F\left[\varphi(z) + \varphi_1(t) + \text{const.},\right.$$
$$\left.\frac{\varphi(z)}{i} - \frac{\varphi_1(t)}{i} + \text{const.}, \frac{z+t}{2}, \frac{z-t}{2i}\right] = 0.$$

Si l'on peut trouver une valeur constante t_0 de t telle que cette relation prenne la forme

$$a\,\varphi(z) + b\,\varphi_1(t_0) = \Phi(z),$$

on en déduira $\varphi(z)$ à une constante près et, par suite, $f(z)$.

Exemple :

$$3xQ - yP = 8x^3y \qquad \text{(Nancy, novembre 1904).}$$

Cette relation peut s'écrire

$$3(z+t)[\varphi(z) - \varphi_1(t)]$$
$$-(z-t)[\varphi(z) + \varphi_1(t)] = (z+t)^3(z-t).$$

Pour $t = 0$, on a

$$3z[\varphi(z) - \varphi_1(0)] - z[\varphi(z) + \varphi_1(0)] = z^4,$$

ou

$$2\varphi(z) = z^3 + 4\varphi_1(0),$$
$$f(z) = z^3.$$

On voit facilement en substituant que la constante est nulle.

CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES EN 1907 (MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES).

SOLUTION PAR UN ANONYME.

I. *Étant donné un triangle* ABC, *trouver sur la droite* BC *un point* D *tel qu'un cercle* (β), *inscrit ou exinscrit au triangle* ABD *et ayant son centre sur la bissectrice intérieure de l'angle* B *du triangle donné, soit tangent à un cercle* (γ), *inscrit ou exinscrit au triangle* ACD *et ayant son centre sur la bissectrice intérieure de l'angle* C *du triangle donné. Même question en considérant les angles extérieurs en* B *et* C, *ou encore un angle intérieur et un angle extérieur.*

II. *On donne deux cercles* (β) *et* (γ) *tangents* extérieurement *et soient* SX, SX′ *les tangentes communes extérieures à ces cercles. Un point* A *décrit la tangente commune intérieure* ZZ′ *et l'on mène de ce point les secondes tangentes aux cercles* (β), (γ), *lesquelles rencontrent* SX *en* B *et* C, SX′ *en* B′, C′ :

1° *Les centres des deux cercles étant* β *et* γ, *le point d'intersection* M *des droites* Bβ *et* Cγ *et le point d'intersection* M′ *des droites* B′β *et* C′γ *décrivent deux droites* Δ, Δ'.

2° *Le quadrilatère* MβM′γ *est inscriptible à un cercle et les deux droites* MM′ *et* $\beta\gamma$ *sont conjuguées par rapport à ce cercle.*

3° *L'enveloppe de* MM′ *est une hyperbole; trouver le point de contact de* MM′ *avec son enveloppe.*

4° *Le cercle* $A\beta\gamma$ *est orthogonal au cercle* $M\beta M'\gamma$. *Ce même cercle* $A\beta\gamma$, *le cercle de centre* M *tangent aux trois côtés du triangle* ABC *et le cercle de centre* M' *tangent aux trois côtés du triangle* AB'C' *ont, deux à deux, même axe radical.*

5° *Désignons par* O *le milieu de* $\beta\gamma$, *par* D *et* D' *les points où* ZZ' *rencontre* SX *et* SX' *et par* ω *le centre du cercle* $A\beta\gamma$.

On a

$$\frac{OM}{DO} = \frac{D'O}{OM'} = \frac{AD'}{AD},$$

$$\frac{1}{\omega O} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{AD'}.$$

I. (Le lecteur est prié de faire les figures pour cette première partie.)

Les deux cercles (β) et (γ) doivent être tangents extérieurement, mais trois hypothèses sont possibles :

1. La tangente commune intérieure peut être la droite AD, les deux cercles touchant cette droite au même point, et c'est ce cas que l'on devait surtout considérer en vue de la seconde partie du problème. *Le point* D *est alors le point de contact avec* BC *du cercle qui touche les trois droites indéfinies* BC, AB, AC, *et qui a son centre au point de rencontre des bissectrices considérées; ces bissectrices étant données, il y a donc un seul point* D, *mais ce point correspond à deux solutions différentes.*

Avec les bissectrices des angles intérieurs, le point D étant entre B et C, les cercles (β) et (γ) peuvent être inscrits aux triangles ADB et ADC, ou être exinscrits dans les angles B et C respectivement; on a, dans les deux cas,

$$DB - DC = AB - AC,$$

et D est le point de contact avec BC du cercle inscrit au triangle ABC.

Avec les bissectrices des angles extérieurs, le point D étant entre B et C, les cercles (β) et (γ) peuvent être exinscrits aux triangles ADB et ADC dans les angles qui ont leurs sommets en A, ou dans ceux qui ont leurs sommets en D; on a alors

$$DC - DB = AB - AC,$$

et D est le point de contact avec BC du cercle exinscrit au triangle ABC dans l'angle A.

Avec la bissectrice de l'angle intérieur en B et celle de l'angle extérieur en C, le point D étant sur le prolongement de BC au delà de C, le cercle (β) peut être inscrit au triangle ABD en même temps que le cercle (γ) est exinscrit au triangle ACD dans l'angle ACD, ou encore le cercle (β) peut être exinscrit au triangle ABD dans l'angle B en même temps que le cercle (γ) est inscrit au triangle ACD; on a alors

$$DB + DC = AB + AC,$$

et D est le point de contact avec BC du cercle exinscrit au triangle ABC dans l'angle B.

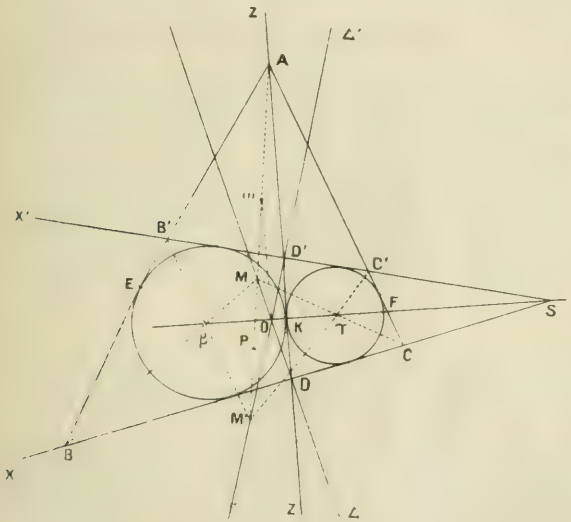
2. La tangente commune intérieure peut être la droite BC, les deux cercles touchent cette droite au même point. Si l'on considère, par exemple, les bissectrices des angles extérieurs en B et C, on trouve $AD = p$, ce qui donne deux solutions; etc.

3. Chacune des droites AD et BC peut être une tangente commune extérieure. Soient E et F les points de contact des cercles (β) et (γ) avec la droite BC, et po-

sons $\overline{BE} = x$, $\overline{CF} = y$, le sens positif pour $\overline{BE}$ étant le sens BC, le sens positif pour $\overline{CF}$ étant le sens CB.

Si les centres β et γ doivent être sur les bissectrices des angles intérieurs en B et C, on a d'abord (sans tenir compte du contact)

$$x + y = p;$$



le contact donne, en observant que $FE = p - a$ (dans le sens BC),

$$xy = \frac{p(p-a)}{4};$$

l'équation

$$X^2 - pX + \frac{p(p-a)}{4} = 0$$

ayant des racines, on a ainsi deux solutions. La distance du milieu du côté BC au milieu du segment FE, dont le sens et la longueur sont connus, est $\frac{1}{2}\sqrt{ap}$.

Les angles extérieurs en B et C ne donnent pas de solution ; l'équation

$$X^2 - (p-a)X + \frac{(p-a)p}{4} = 0$$

n'a pas de racines.

Si l'on considère l'angle intérieur en B et l'angle extérieur en C, on a, avec $EF = p - c$ dans le sens BC,

$$x + y = p - b, \qquad xy = -\frac{(p-b)(p-c)}{4};$$

la distance du milieu du côté BC au milieu du segment EF est $\frac{1}{2}\sqrt{a(p-b)}$.

Avec l'angle intérieur en C et l'angle extérieur en B, on a $FE = p - b$ dans le sens CB, et la distance du milieu du côté CB au milieu du segment FE est

$$\frac{1}{2}\sqrt{a(p-c)}.$$

II. (Le lecteur est prié de compléter la figure.)

1. Soient D et D′ les points où la droite ZZ′ rencontre les droites SX et SX′. En appliquant au triangle ABC le résultat obtenu dans la première partie, avec la première hypothèse, on voit que D est le point de contact avec BC du cercle qui a pour centre le point M et qui est tangent aux trois droites BC, AB, AC; le lieu du point M est donc la perpendiculaire Δ menée en D à la droite SX. Le lieu du point M′ est de même la perpendiculaire Δ' menée en D′ à la droite SX′. Les deux droites Δ et Δ' passent au milieu O du segment $\beta\gamma$.

2. Les côtés du quadrilatère $M\beta M'\gamma$ sont les bissectrices des angles du quadrilatère BB′C′C; ce quadrila-

tère $M\beta M'\gamma$ est donc inscriptible à un cercle. On a, d'ailleurs,

$$\widehat{M} = 1^d + \frac{A}{2}, \qquad \widehat{M'} = 1^d - \frac{A}{2},$$

$$\widehat{\beta} = 1^d + \frac{S}{2}, \qquad \widehat{\gamma} = 1^d - \frac{S}{2}.$$

La droite MM' est la bissectrice de l'angle A.

2 *bis*. La perpendiculaire menée en O à la droite $\beta\gamma$ passe au centre du cercle $M\beta M'\gamma$. Si ω est le point où la droite MM' rencontre cette perpendiculaire, comme les droites $O\beta$ et $O\omega$ sont les bissectrices des angles que forment les droites Δ et Δ', le conjugué du point ω par rapport à M et M' est sur $\beta\gamma$, et la droite $\beta\gamma$ est la polaire du point ω par rapport au cercle considéré. Les droites MM' et $\beta\gamma$ sont donc conjuguées par rapport à ce cercle.

3. Le segment MM', compris entre les droites fixes Δ et Δ', étant vu sous un angle constant de chacun des points β et γ, l'enveloppe de la droite MM' est une conique de foyers β et γ, tangente à ces deux droites. Les valeurs des angles β et γ montrent que cette conique a pour asymptotes les droites Δ et Δ'; elle a un sommet au point K. On peut encore démontrer que le produit des distances des points β et γ à la droite MM' est constant.

Le point de contact de la droite MM' avec son enveloppe est le milieu P du segment MM'. En effet, les droites MM' et $\beta\gamma$ étant conjuguées par rapport au cercle $M\beta M'\gamma$, la droite $\beta\gamma$ passe au pôle de MM', et le milieu P de la corde MM' est un point tel que, si on le joint aux points β et γ, la droite PM est bissectrice de l'angle $\beta P\gamma$ (réciproque du fait considéré plus haut).

Si l'on n'avait pas tenu à n'utiliser que les propriétés focales de l'hyperbole, on aurait pu faire voir que l'aire du triangle MOM′ est constante en démontrant que le produit OM.OM′ est constant (*voir* n° 5). Dans le même ordre d'idées, le fait que P est milieu de MM′ est immédiat.

4. Les valeurs des angles $\beta M \gamma$ et $\beta A \gamma$ étant $\frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$ et $\frac{A}{2}$, les deux cercles $\beta M \gamma$ et $\beta A \gamma$ ont leurs tangentes en β ou en γ rectangulaires; le cercle $A\beta\gamma$ est donc orthogonal au cercle $M\beta M'\gamma$. Le centre du cercle $A\beta\gamma$ est dès lors le point ω.

Autrement : la droite $A\omega$ étant bissectrice de l'angle BAC, en même temps que les droites $A\beta$ et $A\gamma$ sont bissectrices des angles KAB et KAC, si l'on désigne par $2x$ et $2y$ les angles KAB et KAC, on a

$$BA\omega = x + y, \qquad \text{ou} \qquad \beta A \omega = y = \gamma AK,$$

de sorte que $A\omega$ et AK sont également inclinées sur $A\beta$ et $A\gamma$. Le point ω étant d'ailleurs sur la perpendiculaire menée à la droite $\beta\gamma$ en son milieu O, ce point est le centre du cercle $A\beta\gamma$. Donc ....

Un même cercle $M\beta M'\gamma$ donne deux positions du point A sur la droite ZZ′, avec un même cercle $A\beta\gamma$.

4 bis. Le cercle $A\beta\gamma$ étant orthogonal au cercle $M\beta M'\gamma$, si AA_1 est le diamètre de ce cercle issu de A, les points A et A_1 sont conjugués par rapport à M et M′; comme A est un centre de similitude des deux cercles (M) et (M′), A_1 est le second centre de similitude, et le cercle $A\beta\gamma$, de diamètre AA_1, est coradical à ces deux cercles. On peut remarquer que les droites βA et γA sont bissectrices des angles $M\beta B'$ et $M\gamma C'$.

Autrement : le centre A $\beta\gamma$ et les cercles (M) et (M′), qui ont leurs centres en ligne droite, auront deux à deux même axe radical s'il existe à distance finie un point ayant même puissance par rapport à chacun d'eux ; or, les puissances du point S par rapport à ces cercles sont $\overline{SD}^2$, $\overline{SD'}^2$, $\overline{S\beta} \times \overline{S\gamma}$, et l'on a

$$\overline{SD}^2 = \overline{S\beta} \times \overline{S\gamma}$$

dans le cercle de centre O et de rayon

$$OD = O\beta = O\gamma.$$

L'axe radical commun se confond avec la droite SEF, en appelant E et F les points de contact des droites AB et AC avec les cercles (β) et (γ). Les droites Pβ et Pγ passent en effet aux points E et F respectivement, comme on peut le voir au moyen des égalités d'angles

$$\widehat{MP\beta} = \widehat{MP\gamma} = \widehat{M'};$$

comme P est milieu de MM′, E est milieu du segment compris entre les points de contact des cercles (M) et (M′) avec AB ou AC.

5. La similitude des triangles MOβ et βOM′ donne

$$\frac{OM}{O\beta} = \frac{O\beta}{OM'}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{OM}{OD} = \frac{OD'}{OM'},$$

de sorte que MD′ et M′D sont parallèles. On a donc

$$(1) \qquad \frac{OM}{DO} = \frac{D'O}{OM'} = \frac{MD'}{M'D} = \frac{AD'}{AD}.$$

On a encore

$$\frac{AD}{\omega O} = \frac{DM}{OM} = 1 + \frac{DO}{OM} = 1 + \frac{AD}{AD'},$$

ou

$$(2) \qquad \frac{1}{\omega O} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{AD'}.$$

Autrement : si H est l'orthocentre du triangle $A\beta\gamma$, on a $AH = 2\omega O$, et H doit être conjugué de A par rapport à D et D'; or on a

$$KA.KH = K\beta.K\gamma = \overline{KD'}^2.$$

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1907.

Première composition de Mathématiques (Sciences I et II).

SOLUTION PAR M. JEAN SERVAIS.

I. *Étudier la variation de la fonction*

$$y = e^{-x} \sin x.$$

Représenter cette variation par une courbe rapportée à deux axes rectangulaires Ox *et* Oy. *Déterminer les points d'inflexion de la courbe.*

Calculer l'intégrale

$$I_k = \int_0^{k\pi} e^{-x} \sin x \, dx,$$

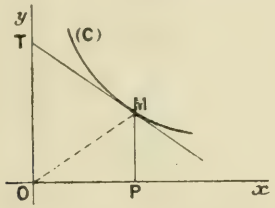
où k *désigne un entier positif* ($k = 1, 2, 3, \ldots$) *et indiquer la signification géométrique de cette intégrale.*

Déterminer la limite de I_k *pour* $k = +\infty$.

II. 1° *Étant donnés deux axes rectangulaires* Ox *et* Oy, *on demande de trouver une courbe* (C) *possé-*

dant la propriéte suivante. Si, en un point quelconque M *de cette courbe, on mène la tangente* MT *qui rencontre* Oy *en* T, *et si l'on abaisse du point* M *la perpendiculaire* MP *sur* Ox, *l'aire du trapèze* OTMP *est équivalente à un carré donné de côté* a (*fig.* 1).

Fig. 1.



On établira l'équation de la courbe en supposant que l'arc de courbe considéré ait, par rapport aux axes, la disposition indiquée sur la figure; on tracera la courbe dont on aura obtenu ainsi l'équation et l'on énoncera la propriété géométrique qui remplace celle de l'énoncé pour les arcs qui présentent une disposition différente de celle de la figure.

2° *Parmi les courbes trouvées on construira en particulier celle qui passe par le point* $x = a$, $y = a$, *et l'on calculera les rayons de courbure de cette courbe aux points d'abscisses* $x = \pm a$.

III. *Un fil élastique, de masse négligeable, est attaché à un point fixe* A; *quand ce fil pend librement sous l'action de la pesanteur, sans être tiré, il a une longueur* AB $= l$ *et une tension nulle. Quand le fil est tiré, à son extrémité libre, de façon à prendre une longueur* AM $= r$, *plus grande que* l, *la tension* F *du fil est une force, dirigée de* M *vers* A, *ayant une intensité proportionnelle à l'al-*

longement

$$F = k(r - l),$$

où k est une constante positive.

1° *Ceci posé, on attache au bout du fil un point pesant; déterminer la masse m de ce point, de façon*

Fig. 2.

qu'il soit en équilibre sous l'action de son poids et de la tension du fil, dans la position O *telle que* $AO = 2l$.

2° *On tire sur le fil portant à son extrémité ce point matériel m et l'on amène le point dans une position* M_0 *telle que* $AM_0 = r_0$ *ait une longueur supérieure à* $2l$, *puis on abandonne le système à lui-même sans vitesse initiale. Étudier le mouvement du point matériel m.*

Quelle doit être la valeur de r_0 pour que le point m remonte jusqu'au point B, *où la tension s'annule, et arrive au point* B *avec une vitesse nulle?*

Quelle doit être la valeur de r_0 pour que le point m

remonte jusqu'en A *et arrive en* A *avec une vitesse nulle?*

I. La dérivée de la fonction est

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x}(\cos x - \sin x).$$

Elle s'annule pour les valeurs de x pour lesquelles

$$\operatorname{tang} x = 1,$$

soit

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

La fonction passe donc alternativement par les maxima et minima pour les valeurs

$$x = \frac{\pi}{4} - 2\pi, \qquad x = \frac{\pi}{4} - \pi, \qquad x = \frac{\pi}{4},$$
$$x = \frac{\pi}{4} + \pi, \qquad x = \frac{\pi}{4} + 2\pi, \qquad \ldots,$$

qui vont en décroissant en valeur absolue et sont alternativement positives et négatives :

$$e^{\frac{7\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad -e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad e^{-\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad -e^{-\frac{5\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad e^{-\frac{9\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \ldots.$$

La courbe représentative coupe d'ailleurs l'axe Ox aux points d'abscisses $k\pi$, elle a donc la forme de la figure 3, d'une sinusoïde déformée dont les sinuosités infiniment grandes à gauche, du côté des x négatifs, décroissent pour devenir infiniment petites du côté des x positifs, de telle sorte que la courbe devient asymptote à Ox du côté positif en serpentant.

La dérivée seconde est

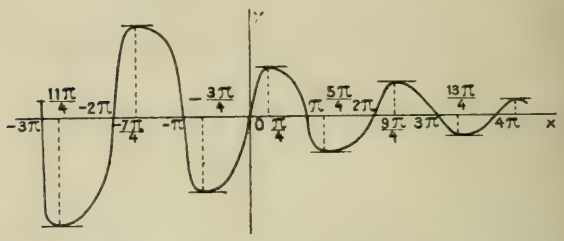
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2e^{-x}\cos x.$$

Les points d'inflexion sont donc les points d'abscisses

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

On obtient, par deux intégrations par parties, l'in-

Fig. 3.



tégrale indéfinie

$$\int e^{-x}\sin x\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x),$$

ce qui donne

$$I_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\pi}, \qquad I_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2\pi},$$

$$I_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-3\pi}, \qquad \ldots;$$

en général

$$I_k = \frac{1}{2}[1 - (-1)^k e^{-k\pi}].$$

Lorsque k croît indéfiniment par valeurs entières positives, la limite de I_k est manifestement $\frac{1}{2}$. C'est la somme d'une série alternée convergente dont les termes sont les aires des boucles successives de la courbe.

II. L'équation de la tangente MT est, en désignant par x, y les coordonnées du point M et par X, Y les

coordonnées courantes,

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x).$$

L'ordonnée OT du point T est donc $(X = 0)$:

$$Y = y - x\frac{dy}{dx}.$$

L'aire du trapèze OTMP est

$$x\frac{y - Y}{2} = \frac{x}{2}\left(2y - x\frac{dy}{dx}\right).$$

L'équation différentielle de la courbe est donc

$$x^2\frac{dy}{dx} - 2xy + 2a^2 = 0.$$

En appliquant à cette équation linéaire le procédé classique, on trouve l'intégrale générale

$$y = \frac{x^2}{3p} + \frac{2a^2}{3x},$$

où p désigne une constante arbitraire.

On voit que la courbe s'obtient en faisant la somme des ordonnées de même abscisse de la parabole

$$y = \frac{x^2}{3p}$$

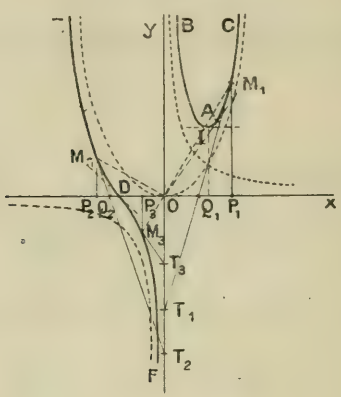
et de l'hyperbole équilatère

$$y = \frac{2a^2}{3x}.$$

Ceci donne immédiatement la courbe qui a la forme (I) (*fig.* 4) quand p est positif et la forme (II) (*fig.* 5) quand p est négatif. Pour $\frac{1}{p} = 0$, on a, en particulier, l'hyperbole, ce qui était à prévoir. On passe

d'ailleurs de la forme (I) à la forme (II) par une

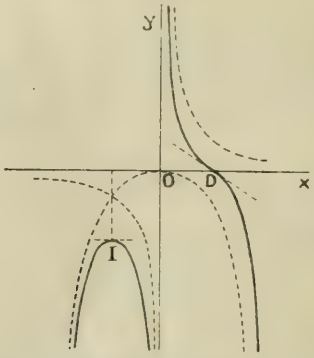
Fig. 4 (forme I).



symétrie par rapport à l'origine.

Le point I où la tangente est parallèle à Ox s'obtient

Fig. 5 (forme II).



en égalant à zéro la dérivée

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3p} - \frac{2}{3}\frac{a^2}{x^2} = \frac{2}{3}\,\frac{x^3 - a^2 p}{p x^2},$$

qui a pour racine réelle unique

$$x = \sqrt[3]{a^2 p}.$$

Le point d'inflexion s'obtient en cherchant la valeur pour laquelle s'annule la dérivée seconde

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{p} - \frac{2a^2}{x^3}\right) = \frac{2y}{x^2}.$$

Cette dérivée s'annule en même temps que y pour

$$x = -\sqrt[3]{2a^2 p};$$

le point d'inflexion D est donc le point où la courbe coupe Ox.

De l'origine O menons la tangente OA à la courbe. L'abscisse de A est donnée par l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},$$

qui s'écrit

$$\frac{x}{3p} = \frac{4a^2}{3x^2}$$

et a pour racine réelle unique

$$x = \sqrt[3]{4a^2 p}.$$

La courbe (*fig.* 4) est ainsi partagée en quatre arcs : BA, AC, ED et DF. L'arc BA correspond à l'énoncé.

D'ailleurs pour *tout* point M de la courbe on a :

$$a^2 = \frac{xy}{2} + \frac{xY}{2};$$

$\frac{xy}{2}$ est, au signe près (*fig.* 1), l'aire du triangle OMP, et $\frac{xY}{2}$ est celle du triangle OMT.

Pour un point M_1 de l'arc AC on a

$$x > 0, \qquad y > 0, \qquad Y < 0;$$

donc

$$a^2 = \text{aire } OM_1P_1 - \text{aire } OM_1T_1$$

ou

$$a^2 = \text{aire } M_1Q_1P_1 - \text{aire } OQ_1T_1,$$

Q_1 étant le point d'intersection de la tangente avec Ox.

Pour un point M_2 de l'arc ED on a

$$a^2 = \text{aire } OM_2T_2 - \text{aire } OM_2P_2$$

ou

$$a^2 = \text{aire } OQ_2T_2 - \text{aire } M_2Q_2P_2.$$

Enfin pour un point M_3 de l'axe DF on a

$$a^2 = \text{aire } OM_3P_3 + \text{aire } OM_3T_3 = \text{aire } OP_3M_3T_3.$$

On voit que, lorsque le trapèze OPMT est convexe, l'équation exprime que son aire est égale à a^2 et que, lorsque le trapèze est concave, a^2 est égal à la différence des aires des deux triangles formés par le recoupement des côtés non parallèles.

Si l'on convient d'appeler *aire* du trapèze concave la somme *algébrique* des aires des deux triangles qui le forment, l'aire d'un de ces triangles étant précédée du signe + ou du signe — suivant qu'un mobile, parcourant le contour MTOP du trapèze dans le sens de M vers T, a l'aire du triangle à sa gauche ou à sa droite, on peut dire que, dans tous les cas, *l'aire du trapèze* MTOP *est égale à* a^2.

Dans le cas particulier où la courbe passe par le point $x = a$, $y = a$, on a $p = a$ et ce point est précisément le point I où $\frac{dy}{dx} = 0$. En ce point on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2a}{a^2} = \frac{2}{a}.$$

Le rayon de courbure est donc égal à $\frac{a}{2}$.

Pour $x = -a$ on a $y = -\frac{a}{3}$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{3}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{3a}.$$

Le rayon de courbure est donc

$$R = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{16}{9}\right)^3}}{\frac{2}{3a}} = \frac{125a}{18}.$$

III. En O (*fig.* 2) la force F est égale à kl, puisque $r = 2l$. Pour que le point soit en équilibre il faut et il suffit que

$$kl = mg,$$

$$m = \frac{kl}{g} \qquad \text{ou} \qquad k = \frac{mg}{l}.$$

Prenons alors O comme origine des abscisses et comme sens positif sur la verticale AO le sens de haut en bas, de A vers O. Soit $\overline{OM} = x$; on a

$$r = 2l + x,$$

d'où

$$F = k(l + x) = mg + \frac{mg}{l}x.$$

L'équation différentielle du mouvement du point est alors

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg - \frac{mg}{l}x + mg,$$

ou

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}x.$$

Il est bon de remarquer de suite que cette équation n'est valable que *si le fil est tendu*, c'est-à-dire si l'on a

$$r \geq l, \qquad \text{ou} \qquad x \geq -l.$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$x = \mathrm{A}\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \mathrm{B}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t,$$

et, d'après les données initiales, on doit avoir, pour $t = 0$,

$$x_0 = r_0 - 2l, \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0,$$

ce qui donne

$$\mathrm{A} = r_0 - 2l, \qquad \mathrm{B} = 0.$$

L'équation du mouvement est

$$(2) \qquad x = (r_0 - 2l)\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t.$$

D'après la remarque précédente elle ne sera *constamment* applicable que si l'on a toujours $x \geqq -l$. Le minimum de x est $-(r_0 - 2l)$. Ceci aura donc lieu si

$$-r_0 + 2l \geqq -l, \qquad \text{ou} \qquad r_0 \leqq 3l.$$

Nous distinguerons donc deux cas :

1° $r_0 \leqq 3l$. Le mouvement de M est un mouvement oscillatoire, autour de la position moyenne O, de période $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ et d'amplitude $2(r_0 - 2l)$. Le point oscille entre M_0 et le point M'_0 symétrique de M_0 par rapport à O.

En particulier M'_0 coïncide avec B si $r_0 = 3l$.

2° $r_0 > 3l$. Dans ce cas le mouvement *commence* par être régi par l'équation (2). Le point M remonte de M_0 en O, passe en O au temps $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$ et atteint le point B à un instant t_1 tel que

$$-l = (r_0 - 2l)\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t_1,$$

avec une vitesse v_1

$$v_1 = -(r_0 - 2l)\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t_1.$$

On a donc

$$v_1^2 = (r_0 - 2l)^2\frac{g}{l}\left[1 - \frac{l^2}{(r_0 - 2l)^2}\right],$$

$$v_1^2 = \frac{g}{l}(r_0 - l)(r_0 - 3l),$$

$$v_1 = -\sqrt{\frac{g}{l}(r_0 - l)(r_0 - 3l)}.$$

A ce moment le fil *se détend* et le point est un point pesant *libre*. Il remonte donc d'un mouvement uniformément retardé, au-dessus de B, jusqu'à une hauteur h telle que

$$h = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{(r_0 - l)(r_0 - 3l)}{2l},$$

puis redescend et revient en B avec la vitesse $|v_1|$. Le fil se tend à nouveau, le mouvement oscillatoire reprend, le point descend jusqu'en M_0 où sa vitesse s'annule; et tout recommence comme précédemment.

Pour que le point arrive en A avec une vitesse nulle, il faut et il suffit que l'on ait

$$h = l,$$

ou

$$(r_0 - l)(r_0 - 3l) = 2l^2,$$

$$r_0^2 - 4l\,r_0 + l^2 = 0.$$

On prend pour r_0 la racine plus grande que $3l$:

$$r_0 = (2 + \sqrt{3})\,l.$$

Déuxième composition de Mathématiques (Sciences I).

SOLUTION PAR M. JEAN SERVAIS.

---

1. Ox, Oy, Oz, *étant trois axes de coordonnées rectangulaires, montrer que l'équation*

$$y^2z^2 + 2kxyz + k^2x^2 - 2ak^2y = 0,$$

où a et k désignent deux longueurs données, définit une surface réglée (Σ). *Trouver les traces et les contours apparents de cette surface sur les plans de coordonnées. Indiquer une construction géométrique des génératrices rectilignes de la surface.*

2. *A quelle condition les coefficients de l'équation*

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

doivent-ils satisfaire, pour que le plan représenté par cette équation contienne une génératrice de la surface? Quelles sont, en supposant cette condition vérifiée, les coordonnées du point de contact du plan et de la surface?

3. *L'intersection de la surface* (Σ) *et du cylindre dont l'équation est*

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0$$

se compose de l'axe Oz *et d'une courbe gauche* (C); *exprimer en fonction rationnelle d'un paramètre les coordonnées d'un point quelconque de* (C). *Une génératrice du cylindre rencontre la courbe* (C) *en deux points : lieu du milieu de ces deux points.*

4. *La section de* (Σ) *par un plan parallèle à* xOy *est une parabole* (P); *exprimer, en fonction de la cote de son plan, le paramètre de cette parabole; trouver le lieu de son foyer et celui de son sommet; construire les projections de ces courbes sur les plans de coordonnées.*

5. *La parabole* (P) *se projette sur* xOy, *suivant une parabole* (Q); *chercher les enveloppes de l'axe et de la directrice de* (Q).

Indiquer, dans le plan xOy, *une définition géométrique des paraboles* (Q).

6. *Il existe, sur chacune des paraboles* (Q), *un point* M *tel que le cercle osculateur en* M *passe par* O : *trouver le lieu du point* M.

1. Le cône directeur de la surface se composant des plans $y = 0$ et $z = 0$, elle ne peut admettre que des génératrices parallèles à ces plans; or l'équation de la surface (Σ) s'écrit :

$$(yz + kx)^2 - 2ak^2y = 0 \tag{1}$$

et sous cette forme on voit que seuls les plans parallèles au plan xOz la coupent suivant des droites :

$$y = \mu,$$
$$\mu z + kx = \pm k\sqrt{2a\mu}.$$

Chacun de ces plans coupe la surface suivant deux droites parallèles, le reste de l'intersection étant rejeté à l'infini suivant la droite à l'infini du plan xOz qui est une droite double de (Σ). Ces génératrices ne sont réelles que si $\mu > 0$. La surface est située tout entière du côté des y positifs.

Pour avoir un paramètre qui entre rationnellement dans les équations, posons

$$2a\mu = \lambda^2$$

et les équations d'une génératrice quelconque seront

$$(2) \qquad \begin{cases} 2ay - \lambda^2 = 0, \\ \lambda^2 z + 2ak(x - \lambda) = 0. \end{cases}$$

Les deux génératrices G et G′ situées dans un même plan parallèle au plan xOz correspondent à deux valeurs opposées de λ.

La trace sur le plan $y = 0$ est l'axe Oz, *deux fois*. La surface est *tangente* au plan zOx tout le long de Oz. La trace sur le plan $z = 0$ est la parabole P_0 :

$$x^2 - 2ay = 0;$$

celle sur le plan $x = 0$ est l'axe Oz et la cubique Q_0 :

$$yz^2 - 2ak^2 = 0,$$

admettant Oy comme axe de symétrie et asymptote à Oz et Oy.

Les contours apparents en projection sont les enveloppes des projections des génératrices.

Le contour apparent sur le plan xOz est donc l'enveloppe de la droite

$$\lambda^2 z - 2ak\lambda + 2akx = 0$$

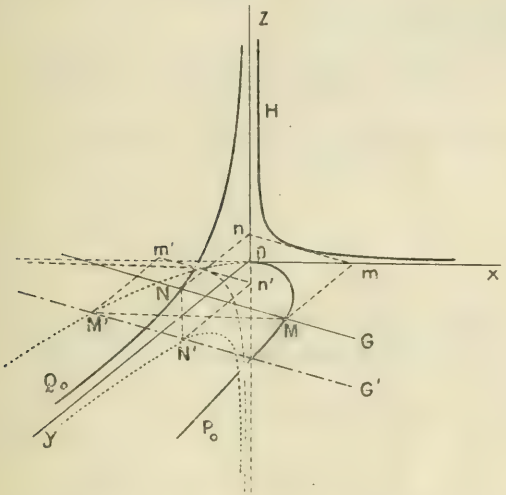
qui est l'hyperbole équilatère H

$$2xz - ak = 0.$$

Les génératrices se projettent sur le plan yOz suivant des parallèles à Oz et sur zOx suivant des parallèles à Ox. Les contours apparents sur ces deux plans sont les projections des génératrices limites. Ce sont les traces Oz et Ox du plan tangent zOx.

On a alors une idée nette de la surface (Σ). Un plan parallèle au plan zOx (*fig.* 6) coupe la surface sui-

Fig. 6.



vant deux génératrices parallèles G et G′ s'appuyant sur la parabole P_0 et la cubique Q_0 en M, N et M′, N′. Lorsque le plan sécant coïncide avec le plan zOx les deux génératrices G et G′ se confondent avec Oz. Lorsque le plan s'éloigne indéfiniment du côté des y positifs les deux droites G et G′ s'éloignent toutes deux indéfiniment dans le plan xOy et viennent coïncider avec la droite à l'infini de ce plan qui est une seconde droite double de la surface.

Pour construire géométriquement une génératrice G nous prenons un point M de la parabole P_0. Soit m la projection de M sur Ox. De m nous menons l'unique tangente mn à l'hyperbole H de contour apparent; la génératrice G est la parallèle MN menée par M à mn.

2. Pour que le plan

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

contienne la génératrice G définie par les équations (2) il faut que l'équation

$$A\left(\lambda - \frac{\lambda^2 z}{2ak}\right) + B\frac{\lambda^2}{2a} + Cz + D = 0$$

soit vérifiée quel que soit z; ce qui donne

$$C - \frac{\lambda^2 A}{2ak} = 0,$$

$$A\lambda + B\frac{\lambda^2}{2a} + D = 0;$$

en éliminant λ entre ces deux équations on aura la condition pour que le plan contienne au moins une génératrice.

La première équation donne

$$\lambda^2 = \frac{2akC}{A},$$

cette valeur portée dans la seconde fournit

$$(3) \qquad \lambda = -\frac{kBC + AD}{A^2};$$

et la condition cherchée est

$$(4) \qquad (kBC + AD)^2 = 2akCA^3.$$

C'est l'équation tangentielle de la surface. Si elle est vérifiée le plan contient la génératrice correspondante à la valeur de λ fournie par l'équation (3) et il est tangent au point

$$x = \frac{(kBC + AD)D - 3akCA^2}{(kBC + AD)A},$$

$$y = k\frac{C}{A},$$

$$z = \frac{(kBC + AD)kB - akA^3}{(kBC + AD)A}.$$

3. Pour avoir la courbe (C) il suffit de chercher le lieu des points d'intersection de la génératrice G avec le cylindre

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0. \tag{5}$$

On aura les coordonnées d'un point en fonction de λ en résolvant le système des trois équations (2) et (5), en x, y, z, ce qui donne

$$x = \pm \frac{\lambda}{2a}\sqrt{4a^2 - \lambda^2},$$

$$y = \frac{\lambda^2}{2a},$$

$$z = \frac{2ak}{\lambda} \mp \frac{k}{\lambda}\sqrt{4a^2 - \lambda^2}.$$

Pour avoir des expressions rationnelles posons

$$\pm\sqrt{4a^2 - \lambda^2} = (2a - \lambda)t.$$

On en tire

$$\lambda = 2a\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \qquad \pm\sqrt{4a^2 - \lambda^2} = \frac{4at}{t^2 + 1},$$

et, par suite,

$$x = \frac{4at(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2},$$

$$y = 2a\left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\right)^2,$$

$$z = k\frac{t - 1}{t + 1}.$$

Cette courbe est du cinquième ordre. Cela tient à ce que l'intersection complète du cylindre et de (Σ) comprend en outre trois fois l'axe Oz.

On voit que x et y pourraient s'exprimer rationnellement en z :

$$(C) \quad \begin{cases} x = \dfrac{4akz(k^2 - z^2)}{(k^2 + z^2)^2}, \\[2ex] y = \dfrac{8ak^2z^2}{(k^2 + z^2)^2}. \end{cases}$$

Les deux points d'intersection d'une génératrice G avec la courbe (C) sont évidemment ses deux points d'intersection avec le cylindre dont le milieu N est dans le plan diamétral correspondant, qui est le plan yOz. Le lieu du milieu N est donc la cubique Q_0, trace de la surface (Σ) sur le plan yOz.

4. Le plan horizontal de cote z coupe la surface (Σ) suivant la droite double à l'infini et une parabole (P) dont la projection horizontale (Q) a pour équation l'équation (1), où l'on considère z comme un paramètre.

On peut remarquer que l'équation (1) est l'équation générale des paraboles osculatrices au cercle (5) au point O. Les résultats qui suivent sont alors classiques. Ceci permettait aussi de prévoir que tout plan horizontal ne coupe la courbe (C) précédente qu'en un point et que le cylindre a l'axe Oz trois fois en commun avec (Σ).

Pour mettre en évidence l'axe et la tangente au sommet de cette parabole (Q) écrivons l'équation sous la forme

$$(yz + kx + \rho)^2 - 2\rho kx - 2(ak^2 + \rho z)y - \rho^2 = 0$$

et choisissons ρ de façon que les deux droites

$$yz + kx + \rho = 0,$$
$$2\rho kx + 2(ak^2 + \rho z)y + \rho^2 = 0$$

soient rectangulaires. Ceci donne

$$\rho k^2 + (ak^2 - \rho z)z = 0,$$
$$\rho = -\frac{ak^2 z}{z^2 + k^2}$$

et l'équation de la parabole (Q) s'écrit

$$\left(yz + kx - \frac{ak^2 z}{z^2 + k^2}\right)^2 + \frac{2ak^3}{k^2 + z^2}\left(zx - ky - \frac{akz^2}{2(k^2 + z^2)}\right) = 0.$$

Changeons de coordonnées en prenant pour axes l'axe de la parabole et la tangente au sommet. Les nouvelles coordonnées X, Y sont alors les distances du point (x, y) à ces deux droites et l'on a

$$(6)\quad \begin{cases} X = \dfrac{1}{\sqrt{k^2+z^2}}\left(-zx + ky + \dfrac{akz^2}{2(k^2+z^2)}\right), \\ Y = \dfrac{1}{\sqrt{z^2+k^2}}\left(kx + zy - \dfrac{ak^2 z}{z^2+k^2}\right). \end{cases}$$

L'équation de la parabole est alors

$$Y^2 - 2\frac{ak^3}{(z^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}X = 0.$$

Le *paramètre* de la parabole est donc

$$(7)\qquad p = \frac{ak^3}{(z^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Le *sommet* est le point $X = 0$, $Y = 0$ ou, en résolvant en x et y,

$$(8)\quad \begin{cases} x = \dfrac{akz(z^2-2k^2)}{2(z^2+k^2)^2}, \\ y = \dfrac{-ak^2z^2}{2(z^2+k^2)^2}. \end{cases}$$

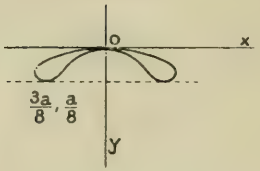
Ces équations, si l'on y considère z comme une coordonnée, définissent le lieu du sommet dans l'espace. Si l'on y regarde z comme un paramètre elles donnent la projection du lieu sur le plan xOy. Cette projection est une quartique unicursale, qui a la forme de la figure 7.

Le *foyer* est le point $X = \frac{p}{2}$, $Y = 0$, ce qui donne, en vertu des formules (6) et (7), et en résolvant en x

et y,

$$(F)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{akz}{2(z^2+k^2)}, \\ y = \dfrac{ak^2}{2(z^2+k^2)}. \end{cases}$$

Fig. 7.



Cette courbe est un *cercle*, car on a

$$x^2 + y^2 = \frac{a}{2}y.$$

5. La *directrice* a pour équation $X = -\frac{p}{2}$, ce qui s'écrit, en vertu des formules (6) et (7),

$$(D)\qquad -zx + ky + \frac{ak}{2} = 0.$$

Elle passe par le point fixe

$$x = 0, \qquad y = -\frac{a}{2}.$$

L'équation de l'*axe* est $Y = 0$ ou

$$kx + zy - \frac{ak^2 z}{z^2+k^2} = 0.$$

L'enveloppe s'obtient en lui adjoignant l'équation dérivée par rapport à z

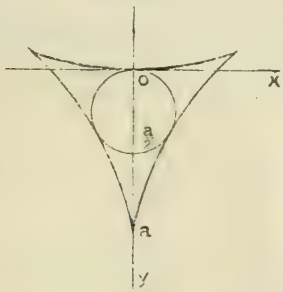
$$y - ak^2\frac{k^2 - z^2}{(z^2+k^2)^2} = 0.$$

L'enveloppe est donc la quartique unicursale

$$\begin{cases} x = \dfrac{2ak^2z^3}{(z^2+k^2)^2}, \\ y = \dfrac{ak^2(k^2-z^2)}{(z^2+k^2)^2}. \end{cases}$$

C'est l'hypocycloïde à trois rebroussements indiquée dans la figure 8, circonscrite au cercle lieu du foyer.

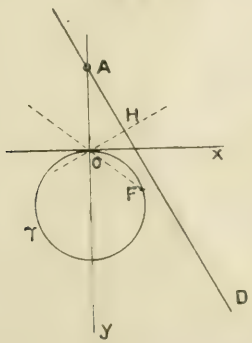
Fig. 8.



Les paraboles (Q) se définissent alors simplement géométriquement.

Soient γ le cercle (*fig.* 9) décrit par le foyer F, A le

Fig. 9.



point $(x = 0, y = -a)$ par lequel passe la direc-

trice D. Pour avoir une parabole (Q), menons par A une droite arbitraire D qui sera la directrice. La parabole cherchée passe par O et est tangente à Ox. Le rayon vecteur OF est donc le symétrique par rapport à Ox de la perpendiculaire OH abaissée de O sur D; ce qui détermine le foyer F.

6. Pour que le point M (x, y) de la parabole (Q) soit le point de contact d'un cercle osculateur passant par O, il faut et il suffit que la droite OM et la tangente MT en M à la parabole soient également inclinées sur la directrice D. Les coefficients angulaires de OM, MT et D sont

$$-\frac{k(yz-kx)}{z(yz+kx)-ak^2},\quad \frac{y}{x},\quad \frac{z}{k}.$$

En exprimant que la troisième direction est bissectrice des deux premières, on trouve la condition

$$(yz+kx)^2(z^2+k^2)-ak^2z(yz+kx)+ak^3(ky-zx)=0.$$

Cette équation jointe à celle de la parabole donne le point (x, y). En y remplaçant $(yz+kx)^2$ par $2ak^2y$ [équation (1)], on conclut finalement que le point x, y est donné par l'intersection de la parabole (Q) d'équation (1) et de la droite

$$y(z^2+3k^2)-2kzx=0.$$

Cette droite coupe la parabole, en dehors de l'origine, au point M cherché

$$(\mathrm{M})\quad \begin{cases} x=\dfrac{4akz(z^2+3k^2)}{9(z^2+k^2)^2}, \\ y=\dfrac{8ak^2z^2}{9(z^2+k^2)} \end{cases}$$

On a ainsi les coordonnées de M exprimée rationnellement en fonction du paramètre z.

Cette courbe unicursale a la même forme que le lieu du sommet (*fig.* 7).

N. B. — Nous avons reçu une solution analogue de M. Bouvaist.

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Bordeaux.

Épreuve théorique. — *On donne une courbe gauche* C *et une sphère* Σ *ayant pour équation, en coordonnées rectangulaires,*

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que les tangentes à la courbe C *soient tangentes à la sphère* Σ *est que les coordonnées* x, y, z *d'un point* M *mobile sur la courbe* C *satisfassent à la relation différentielle*

$$(x^2 + y^2 + z^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) = (x\,dx + y\,dy + z\,dz)^2.$$

Calculer la longueur d'un arc de la courbe C *en fonction des coordonnées des extrémités de l'arc. (On exclut le cas où la courbe* C *est tracée sur la sphère* Σ.)

Montrer géométriquement *que le plan osculateur en un point quelconque de la courbe* C *est tangent à la sphère* Σ.

On déterminera ensuite la courbe C *par la condition qu'elle soit située sur le cylindre de révolution d'axe* Oz *et de rayon donné* b. *On formera, dans ce cas, l'équation du plan osculateur et l'on calculera le rayon de courbure et le rayon de torsion en un point quelconque de* C.

Épreuve pratique. — *Étant données les deux équations*

différentielles linéaires

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left[\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 2x - \frac{1}{x}\right]\frac{dy}{dx}$$
$$+ \left[\frac{1}{4(1+x)} - \frac{4x^3+4x^2+3x+2}{4x(1+x)\sqrt{1+x}}\right]y = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left[\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x}\right]\frac{dy}{dx}$$
$$+ \left[\frac{1}{4(1+x)} + \frac{1}{4x(1+x)\sqrt{1+x}} - \frac{1}{4\sqrt{x(1+x)}}\right]y = 0,$$

montrer qu'elles admettent une solution commune, puis intégrer complètement chacune des deux équations.

(Juillet 1907.)

Caen.

I. *Former, en coordonnées rectangulaires, l'équation d'une surface* S *contenant la parabole*

$$x = \mathrm{R}, \qquad y^2 = 2az$$

et telle que le plan tangent en un point M *de* S *rencontre, à une distance* R *de l'origine, la droite allant de cette origine à la projection du point* M *sur le plan* OXY.

Solution.

On trouve une équation linéaire et l'on a l'intégrale

$$z = \mathrm{R}\,\frac{x^2+y^2-\mathrm{R}x \pm (\mathrm{R}-x)\sqrt{x^2+y^2}}{2ax}.$$

II. *Trouver les trajectoires orthogonales d'une famille de cercles qui ont leur centre en un point de la droite*

$$z = 0, \qquad x = a,$$

et qui sont tangents à OZ *au point* O. *Reconnaître que ce sont des cercles situés dans des plans parallèles à* OY, *les axes étant rectangulaires.*

SOLUTION.

Les coordonnées d'un point des cercles donnés sont

$$x = a(1 + \cos u), \qquad y = a(1 + \cos u)\tang v, \qquad z = a\frac{\sin u}{\cos v};$$

les trajectoires sont déterminées par l'équation

$$\frac{du}{\sin u} = \frac{\sin v\, dv}{\cos v},$$

$$Cx + z - 2Ca = 0; \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2Caz = 0.$$

(Juillet 1907.)

Grenoble.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On considère la surface* S *définie par les équations*

$$x = -u^3 + 3uv^2 - 3u,$$
$$y = -3u^2v + v^3 - 3v,$$
$$z = 3u^2 - 3v^2,$$

dans lesquelles u, v *sont des variables indépendantes, et l'on demande de déterminer :*

1° *Le plan tangent en un point de* S;

2° *L'arête de rebroussement d'une développable circonscrite à* S, *le long d'une des courbes coordonnées* $u = \text{const.}$, *ou* $v = \text{const.}$;

3° *Les lignes asymptotiques de* S;

4° *Les lignes de courbure de* S;

5° *Les rayons principaux en un point de* S.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégration de l'équation*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (x-1)\frac{dy}{dx} - 3(x-2)y = \frac{x^2 - 6x + 7}{(x-1)^4}e^{3x}.$$

(Juillet 1907.)

Lille.

QUESTION DE COURS. — 1° *On suppose que les coordonnées* x, y *d'un point quelconque d'une courbe plane sont*

des fonctions elliptiques d'un paramètre t. Démontrer que cette courbe est algébrique et calculer le nombre de ses points doubles.

2° *Démontrer que les coordonnées d'un point quelconque sur une cubique sans point double peuvent être exprimées par des fonctions elliptiques d'un paramètre.*

3° *Même question pour une courbe algébrique quelconque de genre* un.

Problème. — 1° *On donne l'équation aux dérivées partielles de premier ordre :*

$$(z - px - qy)^2 + \frac{q}{yz} = 0.$$

Démontrer qu'il existe, comme surfaces intégrales, certaines quadriques admettant pour axes les axes de coordonnées.

2° *En déduire l'intégrale générale.*

3° *Déterminer celle des surfaces intégrales qui passe par la courbe*

$$x^2 + z^2 = 1, \qquad x^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

(Juillet 1907.)

Marseille.

Épreuve théorique. — 1° *Démontrer que le rapport anharmonique de quatre intégrales particulières d'une équation dite* de Riccati *de la forme*

$$\frac{dy}{dx} + a + by + cy^2 = 0,$$

où a, b, c sont des fonctions de la variable x, ne dépend pas de x.

2° *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$px^n + qy^n = z^n,$$

où n est un nombre entier positif ou négatif.

Déterminer la surface qui satisfait à cette équation et qui contient la droite dont les équations en coordonnées

rectangulaires sont

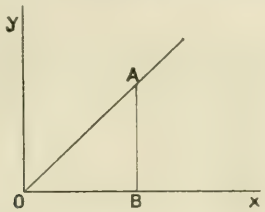
$$z = 1, \qquad x = y\sqrt{2}.$$

Examiner les cas particuliers où l'on a : $n = \pm 1$, $n = 0$ et, dans le cas de $n = -1$, indiquer les lignes de courbure de la surface.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *La variable complexe*

$$z = x + y\sqrt{-1}$$

étant représentée par un point dans un plan, on trace les



parties positives des axes Ox et Oy et la bissectrice de leur angle. On prend sur cette bissectrice un point A que l'on projette en B sur Ox et l'on demande :

1° *D'évaluer l'intégrale $\int e^{-z^2} dz$, prise dans un sens quelconque le long du contour formé par les trois côtés du triangle* OAB ;

2° *De démontrer que l'expression*

$$x \int_0^x e^{y^2} dy - e^{x^2} - 1$$

est négative pour toute valeur positive de x et qu'il en résulte que le module de l'intégrale $\int e^{-z^2} dz$, prise sur le seul côté AB, *tend vers zéro quand le point* A *s'éloigne indéfiniment sur* OA ;

3° *De trouver, dans les mêmes conditions, la limite de l'intégrale $\int_{OA} e^{-z^2} dz$, calculée sur* OA.

NOTA. — *On rappelle la formule réelle*

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

(Juillet 1907.)

Montpellier.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une surface étant rapportée à des axes rectangulaires, la normale au point* M *coupe le plan* XOY *en* A; *ce point* M *se projette en* P *sur le même plan* XOY :

1° *Former l'équation aux dérivées partielles des surfaces telles que la bissectrice de l'angle* AOP *se confonde avec la bissectrice des axes* XOY;

2° *Intégrer cette équation, et former l'équation générale de ces surfaces;*

3° *Déterminer la surface particulière* S *qui passe par la circonférence intersection du plan* $x = y$ *et de la sphère*

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 + z^2 = 4a^2;$$

4° *Déterminer les lignes de courbure des deux systèmes de la surface* S;

5° *Montrer que les lignes de courbure de chaque système passent par deux points fixes et sont des circonférences.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Calculer la surface du paraboloïde*

$$xy = az$$

qui est intérieure au cylindre fermé

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy;$$

2° *Calculer le volume compris à l'intérieur du cylindre, limité par le paraboloïde et par le plan* xOy.

Les axes sont supposés rectangulaires et $a > 0$.

(Juillet 1907.)

Rennes.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. ANALYSE. — *Les formules*

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} x_1 = x(1+zt), \\ y_1 = y(1-zt), \\ z_1 = \dfrac{z}{1-zt}, \end{cases}$$

où t désigne un paramètre, définissent une correspondance entre le point $M(x, y, z)$ et le point $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

1° *Montrer que $\frac{\partial x_1}{\partial t}$, $\frac{\partial y_1}{\partial t}$, $\frac{\partial z_1}{\partial t}$ peuvent s'exprimer en fonction de x_1, y_1, z_1.*

2° *Si l'on donne à t une valeur constante, x_1, y_1, z_1 deviennent les fonctions de x, y, z, et l'expression*

$$x_1 z_1\, dx_1 + y_1 z_1\, dy_1 - z_1^2\, dz_1 - (xz\, dx + yz\, dy - z^2\, dz)$$

peut être mise sous la forme

$$P\, dx + Q\, dy + R\, dz,$$

P, Q, R étant des fonctions de x, y, z. Calculer l'intégrale de différentielle totale

$$\int P\, dx + Q\, dy + R\, dz$$

et montrer qu'elle se réduit à une fonction rationnelle de x, y, z.

3° *Le paramètre t ayant une valeur déterminée quand le point $M(x, y, z)$ décrit une courbe fermée (C), le point correspondant M_1 décrit une courbe fermée (C_1). Vérifier que l'on a*

$$\int_{(C_1)} x_1 z_1\, dx_1 - y_1 z_1\, dy_1 - z_1^2\, dz_1 = \int_{(C)} xz\, dx - yz\, dy - z^2\, dz.$$

4° *Transformer par la formule de Stokes l'intégrale curviligne*

$$\int_{(C)} xz\, dx - yz\, dy - z^2\, dz$$

et montrer que cette intégrale est nulle quand la courbe fermée (C) *est sur une surface de révolution autour de* OZ.

II. Géométrie. — *On donne une famille de courbes* (C) *dépendant d'un paramètre* v. *Ces courbes sont tracées sur un cylindre de révolution de rayon* r, *d'axe* Oz, *et passent par le point* A *de rencontre de* Ox *et du cylindre. Soient*

$$x = r\cos u, \qquad y = r\sin u, \qquad z = r\varphi(u, v)$$

les équations déterminant cette famille.

On porte sur la tangente, en un point quelconque M′ *d'une courbe* (C) *déterminée, un segment* M′M *tel que*

$$\text{arc } AM' + M'M = l,$$

l *étant une constante donnée. Lorsque le point* M′ *décrit la courbe* (C) *choisie, le point* M *décrit une développante* (D) *de cette courbe et, lorsque* (C) *varie, cette développante* (D) *engendre une surface* (Σ).

1° *Lorsque les courbes* (C) *sont des hélices, trouver en fonction des deux paramètres* u *et* v *les coordonnées d'un point quelconque de la surface* (Σ). *Montrer que la surface* (Σ) *reste normale à* M′M, *trouver ses lignes de courbures, étudier leurs particularités et en déduire des générations simples de cette surface.*

2° *Les courbes* (C) *étant quelconques, démontrer géométriquement, en utilisant les propriétés des développées, que, pour que les développantes* (D) *soient lignes de courbure de la surface* (Σ), *il faut et il suffit que la normale en* M *à la surface fasse un angle constant avec la direction* MM′.

Épreuve pratique. — *Étant donnée l'équation aux différentielles totales*

$$(yz + a^2)\frac{dx}{x} + (xz - a^2)\frac{dy}{y} - (x + y)\,dz = 0,$$

où a *désigne une constante :*

1° *Vérifier que la condition d'intégrabilité est satisfaite;*

2° *Intégrer l'équation donnée;*

3° *Déterminer une fonction $\lambda(x, y, z)$ telle que, en multipliant par λ le premier membre de l'équation donnée, on obtienne comme produit une différentielle exacte.*

(Juin 1907.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2054.

(1905, p. 508)

Les axes des coniques ayant un contact du troisième ordre avec une courbe en un point M *donné sont tangentes à une parabole.* (A. Pellet.)

SOLUTION

Par M. Letierce.

Prenons pour axe des x et des y la tangente et la normale à la courbe en M et soit

$$au^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu = 0$$

l'équation tangentielle d'une conique ayant, avec la courbe donnée, un contact du troisième ordre au point M.

L'équation générale des coniques de l'énoncé sera

$$f(u, v, w) = au^2 + \lambda w^2 + 2bvw + 2b'wu = 0$$

(λ paramètre variable).

Les axes sont définis par

$$\frac{f'_u}{u} = \frac{f'_v}{v},$$

$$f'_w = 0.$$

La première de ces équations, qui s'écrit

$$auv + b'vw - bwu = 0,$$

ne dépend pas du paramètre λ; c'est donc l'équation de l'enveloppe des axes. Elle représente une parabole tangente à Ox et à Oy au point d'ordonnée $-\frac{a}{b}$ qui est le centre de courbure de la courbe en M.

Autre solution de M. LAUREAUX.

NOTE

Par M. KLUG.

Si des coniques k_i sont inscrites dans un quadrilatère et si c est une conique quelconque du même plan, les côtés des triangles polaires communs à c et à chaque conique du système k_i sont tangentes à une courbe de troisième classe (P.-E. SCHRÖTER : *Theorie d. Kegelschnitte*, III. Aufl., p. 417).

Mais, si la conique c est la conique absolue (l'intersection d'un cercle avec la droite à l'infini), les côtés de ces triangles sont les axes des coniques k_i et la droite à l'infini. On peut donc dire : *les axes de toutes les coniques inscrites dans un quadrilatère sont tangentes à une courbe de troisième classe.*

Si les coniques k_i sont inscrites dans un quadrilatère qui est circonscrit à un cercle ou si les coniques k_i ont un double contact : les axes des coniques k_i sont les tangentes à une parabole et les droites qui passent dans le premier cas par le centre du cercle, dans le second cas par le point à l'infini de la droite qui est rectangulaire sur la corde de contact.

Si enfin les coniques k_i ont un contact du troisième ordre au point M, les axes des coniques restent les tangentes d'une parabole et, si l'une quelconque de ces coniques a un contact du troisième ordre avec une courbe donnée au point M, toutes les autres ont aussi ce même contact avec cette courbe.

2058.

(1906, p. 576.)

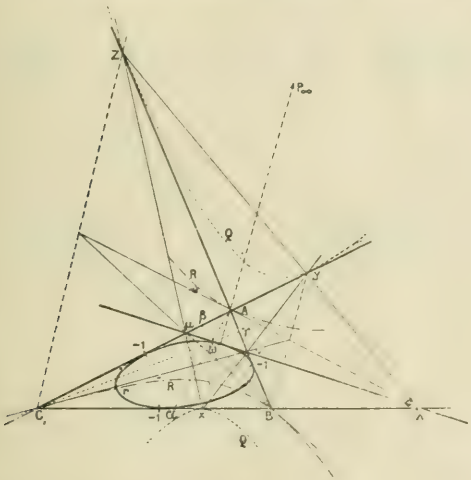
Dans le triangle ABC *on mène les parallèles* Ax, By, Cz *à une direction donnée. Démontrer que l'axe d'homologie* $\Delta(\lambda, \mu, \nu)$ *des triangles* ABC *et* xyz *touche l'ellipse tangente aux milieux des côtés de* ABC *en un point* ω *qui*

est le centre commun à la conique Q *inscrite à* ABC *en* x, y, z *et à la conique* R *inscrite en* A, B, C *au triangle des droites* Aλ, Bμ, Cν. (P. SONDAT).

SOLUTION

Par M. P. SONDAT.

Soit P(x, y, z) un point à l'infini dans le plan du triangle



de référence ABC (*voir* la figure). On a

$$\frac{1}{x} + y = 1, \tag{1}$$

d'où

$$y = \frac{x-1}{x}, \qquad z = \frac{1}{1-x}. \tag{2}$$

Si $\Delta(\lambda, \mu, \nu)$ est la polaire de P,

$$\lambda = -x, \qquad \mu = -y, \qquad \nu = - \tag{3}$$

L'équation (1) peut s'écrire

$$\frac{-1}{\lambda} + \frac{\mu}{-1} = 1, \tag{4}$$

où Δ enveloppe l'ellipse r tangente aux milieux $-1, -1, -1$, des côtés de ABC.

Si $\omega(\alpha, \beta, \gamma)$ est le point de contact,

$$(5) \qquad \begin{cases} \alpha = -\lambda^2, & \beta = -\mu^2, & \gamma = -\nu^2, \\ \alpha = -x^2, & \beta = -y^2, & \gamma = -z^2. \end{cases}$$

Le centre $\theta(x, y, z)$ de la conique Q inscrite à ABC en x, y, z est donné par les formules

$$X = \frac{1-z}{z(1-y)}, \qquad Y = \frac{1-x}{x(1-z)}, \qquad Z = \frac{1-y}{y(1-x)},$$

ou (2)

$$X = -x^2, \qquad Y = -y^2, \qquad Z = -z^2.$$

Donc θ est en ω.

Le centre $\theta_1(X_1, Y_1, Z_1)$ de la conique R inscrite en A, B, C au triangle des droites $A\lambda$, $B\mu$, $C\nu$ est donné par

$$-X_1 = \frac{\lambda(1-\lambda+\lambda\mu)}{-1+\lambda+\lambda\mu},$$

$$-Y_1 = \frac{\mu(1+\lambda-\lambda\mu)}{1-\lambda+\lambda\mu},$$

$$-Z_1 = \frac{\nu(-1+\lambda+\lambda\mu)}{1+\lambda-\lambda\mu},$$

ou (3) et (2)

$$X_1 = -x^2, \qquad Y_1 = -y^2, \qquad Z_1 = = z^2.$$

Donc θ_1 est aussi en ω.

Remarque. — L'équation (4) exprime aussi que R passe par le centre de gravité G de ABC, ce qui devait être, puisque le centre θ de R appartient à r, qui est le lieu des centres des coniques circonscrites au quadrangle GABC.

Autre solution par M. Laureaux.

[R4a]

SUR UN PROBLÈME DE MÉCANIQUE;

PAR M. J. JUHEL-RÉNOY.

C'est un théorème bien connu que les positions d'équilibre d'un point mobile dans un plan et soumis à l'attraction, en raison inverse de la distance, de n centres de même masse, situés dans ce plan et donnés par l'équation $f(z) = 0$, ont pour affixes les racines de l'équation dérivée $f'(z) = 0$.

Mais quelle est la relation de position entre les points racines du polynome $f(z)$ et ceux du polynome dérivé? C'est la question que je crois avoir résolue dans une Note publiée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (19 mars 1906) et sur laquelle je me propose de revenir, avec quelques détails, dans le présent travail, en ajoutant aux résultats obtenus dans cette Note la solution du problème relatif au cas où certains centres sont attractifs et les autres répulsifs.

I. Soit d'abord le cas de trois centres, et, en premier lieu, de trois centres d'attraction dont les affixes sont racines de l'équation

$$f(z) \equiv (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = 0,$$

les positions d'équilibre d'un point, mobile dans le plan des trois centres, soumis à l'attraction de ces trois centres en raison inverse de la distance, sont données par l'équation

$$f'(z) \equiv 3z^2 - 2(z_1 + z_2 + z_3)z - z_1 z_2 - z_2 z_3 + z_3 z_1 = 0.$$

Si l'on prend comme origine des coordonnées le centre de gravité du triangle des trois centres donnés et pour axes les axes principaux d'inertie du triangle relatifs à ce point, on aura les relations

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0,$$
$$z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = \tfrac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - \tfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$

dans lesquelles

$$z_1 = x_1 + iy_1,$$
$$z_2 = x_2 + iy_2,$$
$$z_3 = x_3 + iy_3.$$

Or, en désignant par a et b les demi-axes de l'ellipse centrale d'inertie, M. E. Cesaro, dans un article sur la Géométrie du triangle (*Nouvelles Annales*, 3e série, t. VI, p. 215), a démontré que

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 12\,a^2,$$
$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 12\,b^2;$$

les positions d'équilibre sont donc données par l'équation

$$z^2 = 2\,(a^2 - b^2),$$

qui indique qu'elles coïncident avec les foyers de l'ellipse tangente, en leur milieu, aux droites qui joignent deux à deux les centres d'attraction.

Soit, en second lieu, un point mobile attiré ou repoussé par un point A_1 et repoussé ou attiré par deux points A_2 et A_3, en raison inverse de la distance, le point mobile et les trois centres étant dans le même plan. Les positions d'équilibre sont données par l'équation

$$\frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_2} - \frac{1}{z - z_3} = 0.$$

En prenant pour origine A_1, elle devient

$$z^2 = z_2 z_3 = (x_2 + i y_2)(x_3 + i y_3)$$
$$= x_2 x_3 - y_2 y_3 + i(x_2 y_3 + x_3 y_2).$$

Le coefficient de i est nul si

$$\frac{y_2}{x_2} = -\frac{y_3}{x_3}.$$

Donc, les positions d'équilibre sont sur la bissectrice intérieure de l'angle A_1 du triangle $A_1 A_2 A_3$.

Or

$$x_2 = A_1 A_2 \cos\frac{A_1}{2}, \qquad y_2 = \quad A_1 A_2 \sin\frac{A_1}{2},$$

$$x_3 = A_1 A_3 \cos\frac{A_1}{2}, \qquad y_3 = -A_1 A_3 \sin\frac{A_1}{2},$$

d'où

$$z^2 = A_1 A_2 . A_1 A_3,$$

et, par suite, les positions d'équilibre coïncident avec les foyers de l'hyperbole, tangente en son milieu à la droite qui joint les deux centres qui sont de même nature, attractifs ou répulsifs tous les deux, et admettant comme asymptotes les deux droites joignant deux centres de nature différente.

On peut donc énoncer ce théorème :

Théorème I. — *Les positions d'équilibre d'un point mobile dans un plan et soumis à l'action attractive ou répulsive de trois centres de ce plan, de même masse, en raison inverse de la distance, coïncident avec les foyers d'une conique tangente, en leur milieu, aux droites joignant deux centres de même nature et asymptote aux droites joignant deux centres de nature différente.*

II. Il est facile d'établir un théorème analogue dans le cas d'un nombre quelconque de centres.

Considérons en effet, dans un plan, n points

$$A_k (k = 1, 2, \ldots, n)$$

donnés par les équations

$$A_k \equiv u x_k + v y_k + 1 = 0.$$

L'équation

$$\sum \frac{1}{A_k} = 0$$

est l'équation tangentielle d'une courbe de classe $(n - 1)$ tangente, en leurs milieux, aux droites qui joignent deux à deux les points A_k. On voit d'ailleurs facilement que les tangentes menées à la courbe du milieu de $A_m A_p$, par exemple, et distinctes de $A_m A_p$, sont tangentes à la courbe de classe $(n - 3)$ tangente, en leurs milieux, aux droites qui joignent deux à deux les $(n - 2)$ points A_k autres que A_m et A_p.

Proposons-nous de trouver les foyers de la courbe

$$\sum \frac{1}{A_k} = 0.$$

Soient α, β les coordonnées rectangulaires d'un foyer et posons

$$z = \alpha + \beta i,$$
$$z_k = x_k + i y_k.$$

On a

$$v = ui,$$

d'où

$$A_k \equiv u x_k + v y_k + 1 = u z_k + 1,$$
$$u \alpha + v \beta + 1 = u z + 1 = 0$$

et, par suite,

$$A_k = u (z_k - z).$$

L'équation qui donne les affixes des foyers réels est donc

$$\sum \frac{1}{z - z_k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

c'est-à-dire l'équation qu'on obtient en égalant à zéro la dérivée logarithmique du polynome

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n).$$

On a donc ce théorème que j'ai énoncé dans la Note publiée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (19 mars 1906) :

Théorème II. — *Les positions d'équilibre d'un point mobile attiré par n points fixes*

$$A_k (k = 1, 2, \ldots, n)$$

de même masse, en raison inverse de la distance, coïncident avec les foyers réels d'une courbe de classe $(n - 1)$ *tangente, en leurs milieux, aux droites qui joignent deux à deux les centres d'attraction.*

En particulier, si A_1, A_2, A_3 désignent les affixes des racines d'un polynome du troisième degré, les affixes des racines du polynome dérivé sont les foyers de l'ellipse tangente aux milieux des côtés du triangle $A_1 A_2 A_3$ et ayant, par suite, pour centre le centre de gravité du triangle; dans le cas général, d'ailleurs, les affixes des racines d'un polynome ont même centre des moyennes distances que les affixes des racines du polynome dérivé.

III. On démontrerait, absolument de la même manière, que l'équation

$$\sum \frac{m_k}{A_k} = 0$$

représente une courbe de classe $(n-1)$ tangente aux $\frac{n(n-1)}{2}$ droites joignant deux à deux les points A_k, le point de contact divisant le segment A_kA_p dans le rapport $-\frac{m_k}{m_p}$, les foyers réels étant donnés par l'équation

$$\frac{f'(z)}{f(z)} \equiv \sum \frac{m_k}{z - z_k} = 0,$$

dans laquelle

$$f(z) = (z - z_1)^{m_1}(z - z_2)^{m_2} \ldots (z - z_n)^{m_n},$$

et l'on aurait ce théorème (*Comptes rendus, loc. cit.*) :

Théorème III. — *Les positions d'équilibre d'un point mobile attiré par n centres fixes* A_k, *situés dans un plan, de masse* m_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, *en raison inverse de la distance, sont les foyers réels d'une courbe de classe* $(n-1)$ *tangente aux*

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

droites qui joignent deux à deux les n points A_k, *le point de contact de chaque segment* A_kA_p *le divisant dans le rapport* $-\frac{m_k}{m_p}$.

IV. On peut retrouver les résultats précédents d'une manière toute différente, en faisant usage d'une notion due à Laguerre, celle de l'orientation. On sait que :

« Étant donnés dans un plan deux systèmes de n droites A et B, et un axe fixe arbitraire H dans ce plan, si la somme des angles que font avec l'axe fixe les droites du système A est égale à un multiple de π

près à la somme des angles que font avec ce même axe les droites du système B, les deux systèmes A et B ont même orientation. Ils jouissent alors de cette propriété relativement à tout autre axe situé dans le plan. »

Soient alors $A_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ les points-racines d'un polynome de degré n et $A'_h (h = 1, 2, \ldots, n-1)$ les points-racines du polynome dérivé. Prenons pour origine des coordonnées le point A_n, par exemple, et soit

$$f(z) = z(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_{n-1})$$

le polynome dont les zéros donnent les points A_k; les points A'_h seront donnés par les zéros du polynome

$$f'(z) = n(z - z'_1)(z - z'_2)(z - z'_3)\ldots(z - z'_{n-1}),$$

ce qui donne immédiatement la relation

$$n z'_1 z'_2 z'_3 \ldots z'_{n-1} = z_1 z_2 z_3 \ldots z_{n-1}$$

qu'on peut énoncer, sous forme de théorème, de la manière suivante, en vertu de la formule de Moivre :

Théorème IV. — *Le système des droites joignant un des points A_k à tous les autres points A_k a même orientation que le système des droites joignant le même point A_k aux $(n-1)$ points A'_h.*

Cela posé, considérons une courbe de classe $(n-1)$ ayant pour foyers les $(n-1)$ points A'_h et tangente aux droites joignant deux à deux les $(n-1)$ points A_k autres que A_n ; cette courbe devant satisfaire ainsi à un nombre de conditions égal à

$$2(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$$

est déterminée.

Or, Laguerre a démontré que :

« Si, par un point situé dans le plan d'une courbe plane réelle de classe n, on mène les n tangentes à la courbe, et si l'on joint ce point aux n foyers réels de la courbe, les deux faisceaux de droites ainsi obtenus ont même orientation. »

Il résulte de ce théorème et de celui qui le précède immédiatement que la courbe que nous considérons est, en vertu de l'orientation, tangente aux droites joignant le point A_n aux $(n-1)$ autres points A_k. Il existe donc une courbe de classe $(n-1)$ ayant pour foyers les $(n-1)$ points A'_h et tangente aux droites joignant deux à deux les n points A_k.

Cette courbe est d'ailleurs tangente à chacune de ces droites en son milieu. En effet, l'origine des coordonnées étant quelconque, soit

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n),$$
$$f'(z) = n(z - z'_1)(z - z'_2)\ldots(z - z'_{n-1}).$$

L'orientation du système des tangentes menées de l'origine à la courbe étant, d'après le théorème de Laguerre, la même que l'orientation du système des droites joignant l'origine aux foyers réels, ne dépend que du produit

$$z'_1 z'_2 z'_3 \ldots z'_{n-1}.$$

Or, en représentant par S_q^p la somme des produits p à p des q quantités $z_1 z_2 \ldots z_q$, on a

$$z'_1 z'_2 \ldots z'_{n-1} = \frac{1}{n}\left[S_{n-1}^{n-2} z_n + z_1 z_2 \ldots z_{n-1}\right]$$

pour déterminer l'orientation des tangentes menées de l'origine à la courbe. Si l'origine est un point quel-

conque de $A_{n-1}A_n$

$$z_{n-1} = \alpha z_n,$$

$$z'_1 z'_2 \ldots z'_{n-1} = \frac{1}{n}(S_n^{n-2}{}_1 + \alpha z_1 z_2 \ldots z_{n-2}) z_n$$

$$= \frac{1}{n}[z_n{}_1 S_{n-2}^{n-3} + (\alpha + 1) z_1 z_2 \ldots z_{n-2}] z_n,$$

et si, en particulier, $\alpha = -1$,

$$z'_1 z'_2 \ldots z'_{n-1} = \frac{1}{n} S_{n-2}^{n-3} z_n{}_1 z_n.$$

Le point de contact est donc le milieu de $A_{n-1}A_n$ et l'on voit, en outre, que le système des tangentes, autres que $A_{n-1}A_n$, menées de ce point à la courbe a même orientation que le système des droites joignant ce point aux foyers d'une courbe de classe $(n-3)$, tangente, en leurs milieux, aux droites qui joignent deux à deux les $(n-2)$ points $A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}$. Ce résultat avait déjà été indiqué, sous une forme différente, au paragraphe II.

V. Ce qui précède permet d'établir un certain nombre de relations métriques, parmi lesquelles nous signalerons les deux théorèmes suivants :

Théorème V. — *Soient* $A_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ *n centres d'attraction en raison inverse de la distance,* $A'_h (h = 1, 2, \ldots, n-1)$ *les positions d'équilibre d'un point soumis à l'action de ces centres. Le produit des distances d'un quelconque des centres aux* $(n-1)$ *positions d'équilibre est dans le rapport* $\frac{1}{n}$ *avec le produit des distances de ce centre aux* $(n-1)$ *autres centres.*

La démonstration résulte immédiatement de la re-

lation

$$n z'_1 z'_2 \ldots z'_{n-1} = z_1 z_2 \ldots z_{n-1}.$$

Théorème VI. — *Soient* $(C)_{n-1}$ *la courbe de classe* $(n-1)$ *tangente, en leurs milieux, aux droites joignant deux à deux les* n *points* $A_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ *et* $(C)_{n-3}$ *la courbe analogue relative aux* $(n-2)$ *points* $A_k (k = 1, 2, \ldots, n-2)$, *le rapport du produit des distances du milieu de* $A_{n-1} A_n$ *aux foyers de* $(C)_{n-1}$ *au produit des distances du même point aux foyers de* $(C)_{n-3}$ *est égal à* $\frac{n-2}{n}\left(\frac{A_{n-1}A_n}{2}\right)^2$.

Cet énoncé n'est que l'interprétation de la relation

$$z'_1 z'_2 \ldots z'_{n-1} = \frac{1}{n} S_{n-2}^{n-3} z_{n-1} z_n.$$

En particulier, si F et F′ sont les foyers de l'ellipse tangente aux milieux M, N, P des côtés d'un triangle ABC, on a les deux relations

$$AF.AF' = \frac{bc}{3},$$

$$MF.MF' = \frac{a^2}{12}.$$

VI. Nous n'avons jusqu'ici, sauf dans le cas particulier de trois centres, considéré que des centres d'attraction. Il suffirait, à la vérité, dans l'énoncé du théorème III, d'affecter d'un signe les coefficients m_k pour trouver un théorème relatif à des centres attractifs ou répulsifs. Le cas particulier, où les coefficients m_k sont tous égaux en valeur absolue, est, sans nul doute, plus intéressant que le cas général; il détermine, d'une façon complète, les positions d'équilibre d'un point mobile dans un plan et soumis à l'action, attractive ou répulsive, en raison inverse de la distance, de n centres de même masse situés dans ce plan.

Le théorème III s'énonce, en effet, dans ce cas, de la manière suivante :

Théorème VII. — *Les positions d'équilibre d'un point mobile dans un plan et soumis à l'action, attractive ou répulsive, en raison inverse de la distance, de n centres de même masse situés dans ce plan, coïncident avec les foyers d'une courbe de classe* $(n-1)$ *tangente, en leur milieu, aux droites qui joignent deux centres de même nature et asymptote aux droites qui joignent deux centres de nature différente.*

Remarque. — Il faut $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ conditions pour déterminer une courbe de classe $(n-1)$; par suite, n points étant pris dans un plan, si l'on considère une courbe de classe $(n-1)$ asymptote à $(n-1)$ des droites joignant deux à deux ces n points et tangente aux $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ autres, elle sera déterminée et sera, par suite, tangente aux $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ droites en leur milieu. Le cas particulier de trois centres donne la propriété fondamentale de la tangente à l'hyperbole.

[Q2]

SUR UNE EXTENSION A L'ESPACE D'UN THÉORÈME DE GRASSMANN;

Par M. Lucien Godeaux.

Grassmann a établi le théorème suivant :

Les droites qui rencontrent les côtés correspondants de deux triangles donnés dans un même plan

en des couples d'une involution enveloppent une courbe de troisième classe (¹).

Nous nous proposons d'étendre ce théorème à l'espace à $r-1$ dimensions. A vrai dire, pour $r=4$, cette généralisation a été commencée par M. Neuberg (²) et par nous (³), mais dans l'article de M. Neuberg et l'un des nôtres, la forme qui lie les éléments envisagés est une involution, alors qu'ici nous nous proposons de considérer une forme quelconque.

Soit, dans un espace linéaire à $r-1$ dimensions, un groupe de k espaces linéaires à $r-n$ dimensions.

Chacun de ces k espaces est l'intersection de $n-1$ espaces linéaires à $r-2$ dimensions qui ont pour équations

$$a_{ijx}=0, \qquad (i=1,\ldots,n-1; j=1,\ldots,k.),$$

a_x désignant une forme linéaire homogène à deux variables.

Dans la suite, nous désignerons ce groupe par la lettre A.

n points donnés dans un espace linéaire à $r-1$ dimensions déterminent un espace linéaire ξ à $n-1$ dimensions.

Soient $x_i\,(i=1,2,\ldots,n)$ ces n points, leurs coordonnées étant respectivement

$$(xi_1, xi_2, \ldots, xi_r).$$

(¹) Neuberg, *Sur les quadrangles et les quadrilatères paralogiques* (*Mathesis*, 3e série, t. II, 1902).

(²) Neuberg, *Sur le complexe de Grassmann* (*Mathesis*, 3e série, t. II, 1902).

(³) L. Godeaux, *Sur un complexe du sixième ordre et de la sixième classe* (*Bul. de l'Académie royale de Belgique*, janvier 1907). — L. Godeaux, *Sur un mode de génération des surfaces* (Adressé à la rédaction des *Nouvelles Annales de Mathématiques* en août 1906).

Un point quelconque de l'espace ξ a pour coordonnées

$$\begin{aligned}
&\mu_1 x_{11} + \mu_2 x_{21} + \ldots + \mu_n x_{n1},\\
&\mu_2 x_{12} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\mu_1 x_{1r} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mu_n x_{nr}.
\end{aligned}$$

Pour que ce point soit situé sur le $j^{\text{ième}}$ espace à $r-n$ dimensions du groupe A, les valeurs μ doivent satisfaire aux équations

$$\begin{aligned}
&\mu_1 a_{1jx1} + \mu_2 a_{1jx2} + \ldots + \mu_n a_{1jxn} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\mu_1 a_{(n-1)jx1} + \ldots + \mu_n a_{(n-1)jxn} = 0.
\end{aligned}$$

Les μ sont donc fournis par la matrice

$$(1) \qquad \left\| \begin{matrix} a_{1jx1} & \ldots & a_{1jxn} \\ a_{2jx1} & \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{(n-1)jx1} & \ldots & a_{(n-1)jxn} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Nous désignerons ces valeurs μ par μj_1, μj_2, ...

Lorsque j est successivement égal à $1, 2, \ldots, k$, nous obtenons k groupes de valeurs μ.

Supposons ces k groupes liés par une relation de la forme

$$(2) \qquad \alpha_{1\mu_1} \alpha_{2\mu_2} \ldots \alpha_{k\mu_k} = 0,$$

α_μ désignant une forme linéaire homogène à n variables.

Remarquons que les valeurs déduites de la matrice (1) sont linéaires en x_1, sauf l'une d'elles qui ne contient pas ces variables.

Si nous remplacons dans (2) les μ par leurs valeurs respectives, il nous viendra un polynome à n^k termes.

On peut trouver aisément le nombre de termes qui sont du degré i en x_1.

Prenons, dans $k - i$ systèmes de valeurs de μ, les $k - i$ valeurs qui sont de degré zéro en x_1. Il est visible que le nombre de termes de degré i en x_1 et dans lesquels entrera le produit des $k - i$ valeurs choisies est $(n - 1)^i$. Comme on peut prendre dans les k groupes de μ, c_k^{k-i} produits différents et de degré zéro en x_1, le nombre total des termes de degré i en x_1 est

$$c_k^{k-i}(n-1)^i$$

ou

$$c_k^i(n-1)^i.$$

Remarquons que ce nombre est le $i^{\text{ième}}$ terme du développement de

$$[1 + (n-1)]^k.$$

Si, en outre du groupe A, nous considérons $n^k - 1$ groupes analogues B, C, ..., H, mais dont les paramètres μ déterminés comme précédemment satisfont toujours à la relation (2), nous obtenons n^k équations entre lesquelles nous pouvons facilement éliminer les coefficients α. Il nous reste alors une équation écrite sous forme d'un déterminant à n^k lignes et homogènes en $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Le degré du déterminant en x_1 est

$$\nu = 0\, c_k^0 + 1\, c_k^1(n-1) + 2\, c_k^2(n-1)^2 + \ldots + k\, c_k^k(n-1)^k.$$

Supposons les coordonnées des points $X_2, X_3, \ldots, X_n$ constantes et prenons celles de X_1 comme coordonnées courantes. L'équation représente maintenant un cône de l'ordre ν et ayant pour sommet l'espace à $n - 2$ dimensions déterminé par les points $X_2, \ldots, X_n$.

Nous disons un cône, car on voit aisément que, dans

chacun des termes du développement du déterminant, il entre des facteurs de la forme

$$\begin{vmatrix} a_{1jx1} & \cdots & a_{1jxn} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n-1\,jx1} & \cdots & a_{n-1\,jxn} \end{vmatrix},$$

provenant de la matrice (1) et qui s'annulent pour

$$x_2 = x_1,$$

par exemple.

On peut donc dire que les espaces tels que ξ qui passent par un espace linéaire à $n-2$ dimensions sont tangents à un cône d'ordre ν, par conséquent on peut dire que le lieu des espaces ξ est une variété algébrique de classe ν.

Pour $n = r - 1$, le cône se décompose en ν espaces linéaires à $r-2$ dimensions passant par un espace linéaire à $n-3$ dimensions.

VARIÉTÉS.

ASSOCIATION SCIENTIFIQUE INTERNATIONALE ESPÉRANTISTE.

L'*Internacia Scienca Asocio Esperantista*, dont nous avons déjà entretenu nos lecteurs, a été définitivement fondée le 15 août 1907, à l'occasion du troisième Congrès espérantiste qui a eu lieu à Cambridge (Angleterre).

D'après les statuts, votés par environ 70 membres présents, l'Association comprend trois catégories de membres :

1° *Membres d'honneur;*

2° *Membres actifs,* payant une cotisation annuelle minima de 5fr, seuls éligibles au Conseil d'administration et ayant seuls droit de vote dans les Assemblées;

3° *Membres non actifs,* ne payant aucune cotisation, pouvant prendre part aux travaux scientifiques et aux séances de l'Association, mais n'ayant pas le droit de vote et inéligibles.

Les journaux scientifiques, représentés par leur directeur, et les Sociétés scientifiques, représentées par leur président, peuvent faire partie de l'Association.

Les fonctions de président sont annuelles. Chaque année le président sortant est remplacé par le plus ancien vice-président. Les anciens présidents sont membres à vie du Comité.

Le siège social de l'Association est à Genève, 8, rue Bovy-Lysberg, où est installé l'Office scientifique international, *Internacia Scienca Oficejo*, qui, sous la direction du Secrétaire général, centralise les travaux de l'Association, conserve les archives, veille aux publications et gère financièrement l'Association.

Dès aujourd'hui la nouvelle Association comprend 700 membres, ayant signé la déclaration de Genève, que nous avons publiée dans le numéro d'avril. Son organe officiel est l'*Internacia Scienca Revuo,* revue mensuelle de 32 pages grand in-8° par numéro, dont la quatrième année est en cours de publication et dont l'abonnement réduit pour les membres *actifs* de l'Association est de 5fr par an.

Le Comité, élu à l'unanimité des membres présents, se compose pour 1908 de la façon suivante :

Président : Dr Ad. Schmidt, professeur à l'Univer-

sité de Berlin, et chef de l'Observatoire magnétique de Potsdam.

Vice-Présidents : MM. J.-J. Thomson, professeur à l'Université de Cambridge, directeur du laboratoire Cavendish; R. Benoît, directeur du Bureau international des Poids et Mesures, à Sèvres.

Secrétaire général : René de Saussure, privat-docent à l'Université de Genève.

Secrétaires : MM. Carlo Bourlet, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, à Paris; W. Schmurle, ingénieur à Stuttgart.

Membres : MM. Ed. Huntington, professeur à l'Université de Harvard, Cambridge (U. S. A.); F. Villareal, doyen de la Faculté des Sciences de Lima (Pérou); H. Pellat, professeur à la Faculté des Sciences de Paris; R. Codorniu, ingénieur en chef des Eaux et forêts, à Murcie (Espagne); J. Meazzini, géologue, à Arezzo (Italie); Fournier d'Albe, membre de la Société royale de Dublin (Irlande); Dr K. Bein, oculiste, à Varsovie (Pologne); Dr K.-B.-R. Aars, membre de l'Académie des Sciences de Norvège.

En outre le général Sebert, membre de l'Institut, président sortant, devient membre à vie du Comité.

L'Association pourra comprendre des sections spéciales. Dès maintenant nous pensons que le nombre des mathématiciens inscrits à l'Association est assez grand pour qu'il y ait lieu de les grouper.

Nous prions donc ceux de nos lecteurs qui auraient l'intention de se faire inscrire dans la *Section mathématique* de l'Association d'écrire à M. Carlo Bourlet, 22, avenue de l'Observatoire, à Paris, *de préférence en esperanto*.

CORRESPONDANCE.

M. **W. Gallatly. M.-A.** (*Boscombe*). — *Sur l'application des coordonnées trilinéaires au cercle des neuf points.*

Soient D, E, F les milieux de BC, CA, AB;

X, Y, Z les points de contact avec le cercle inscrit.

Prenons DEF pour le triangle des coordonnées trilinéaires et appliquons les symboles a, b, c, ..., R, ... à DEF.

L'équation du cercle des neuf points est

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} = 0.$$

Prenons pour le cercle XYZ

$$k(a\alpha + b\beta + c\gamma)(l\alpha + m\beta + n\gamma) + \alpha\beta\gamma + \ldots = 0.$$

Au cercle XYZ appliquons la méthode de Salmon (*Coniques*, p. 128).

Il en résulte que l'équation du cercle XYZ est

$$2R(a\beta\gamma + b\gamma\alpha + c\alpha\beta) = a(b-c)^2\alpha + \ldots.$$

Les deux cercles ont

$$a(b-c)^2\alpha + \ldots = 0$$

pour droite d'intersection.

Mais

$$a(b-c)^2\alpha + \ldots = 0$$

est la tangente à

$$\frac{a}{\alpha} + \ldots = 0$$

au point $P\left(\frac{1}{b-c}, \frac{1}{c-a}, \frac{1}{a-b}\right)$.

Les deux cercles se touchent au point P.

Soient P_1, P_2, P_3 les points de Feuerbach pour les cercles exinscrits à ABC.

L'équation de la tangente à P_1 est

$$a(b-c)^2\alpha + b(c+a)^2\beta + c(a+b)^2\gamma = 0.$$

Si les tangentes à P et P_1 se coupent en Q, et les tangentes à P_2 et P_3 se coupent en Q', il en résulte que DQ est la bissectrice extérieure, et DQ' la bissectrice intérieure de l'angle D.

Le centre O du cercle ABC, ou l'orthocentre de DEF, est le point (séc A, séc B, séc C).

Le centre I du cercle inscrit est $\left(\frac{s-a}{a}, \frac{s-b}{b}, \frac{s-c}{c}\right)$.

Il en résulte que OI a pour équation

$$a(b-c)\cos A\,\alpha + \ldots = 0.$$

YZ coupe DE, DF aux points K, K', tels que

$$DK = DK' = a.$$

L'équation de YZ est

$$a^2\alpha + b(a-c)\beta + c(a-b)\gamma = 0.$$

Décrivons une parabole qui a pour foyer le point P et qui touche les côtés de DEF. L'équation de cette parabole est

$$a\sqrt{(b-c)\alpha} + \ldots = 0.$$

(Salmon, vers la fin du Chapitre XIV).

La directrice est

$$a\alpha(b-c)\cos A + \ldots = 0,$$

qui est OI.

YZ touche cette parabole, car

$$\frac{a^2(b-c)}{a^2} + \frac{b^2(c-a)}{b(a-c)} + \frac{c^2(a-b)}{c(a-b)} = 0.$$

Il en résulte que la parabole, qui a P pour foyer et OI pour directrice, touche les côtés de DEF et XYZ.

BIBLIOGRAPHIE.

Étude dynamique des voitures automobiles, par M. *Albert Petot,* professeur de Mécanique à l'Université de Lille. 1er fasc. 1 vol. autogr. in-4° de 207 p. Lille, J. Schaller, et Paris, Gauthier-Villars, 1907.

Le temps où, dans nos Facultés des Sciences, on réduisait l'enseignement de la Mécanique à cette mécanique dite *rationnelle* parce que fort souvent elle n'est pas *raisonnable*, est passé, ou, du moins, commence à passer. On s'est enfin rappelé, après une période analytique à outrance provoquée par Lagrange, que la Mécanique est une science expérimentale où le calcul n'est qu'un auxiliaire utile, mais qui ne doit pas sortir du rôle de serviteur qui lui convient.

M. Albert Petot, élevé au lait de la vieille école, essaie courageusement de réagir et, dans les leçons qu'il fait à ses élèves à la Faculté de Lille, il s'efforce de leur faire voir que la Mécanique est autre chose qu'un jeu d'esprit, et, choisissant son sujet parmi la plus moderne des applications, vient de leur faire une série de leçons sur l'Automobile.

Le premier fascicule de ces leçons autographiées (production du mouvement de locomotion, rôle du différentiel, mode d'action des ressorts et bandages) forme un imposant Volume de 207 pages.

L'Ouvrage comprend quatre Chapitres.

Le premier, relatif à la résistance à la traction, détermine les conditions d'équilibre dynamique d'une voiture en marche, étudie l'adhérence et en tire les conséquences pour éviter le patinage. L'auteur, plus d'une fois, obligé de se servir des résultats d'expériences aussi anciennes que celles de Morin, hésite dans ses conclusions. C'est qu'il y a là une grande lacune expérimentale à combler et nous avons grand besoin que des expérimentateurs reprennent méthodiquement les études des frottements, résistances de roulement, etc.

Le Chapitre II étudie le mouvement, calcule les réactions recherche la puissance à donner au moteur.

Le Chapitre III traite du *Différentiel* au point de vue cinématique et dynamique et au point de vue de son influence sur la stabilité de la voiture.

Enfin, M. le professeur Petot réserve tout le chapitre IV à l'étude des ressorts et des bandages et à leurs actions sur la voiture.

Sobre de calculs, présentant toujours les questions sous une forme concrète directe, faisant des approximations nombreuses et raisonnées, l'auteur nous a montré ce que peut un mathématicien qui sait ne prendre dans son arsenal que les armes utiles. C. B.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Réduction d'un système de vecteurs parallèles.*

II. *Étude de l'effet des percussions appliquées à un solide mobile autour d'un axe fixe.*

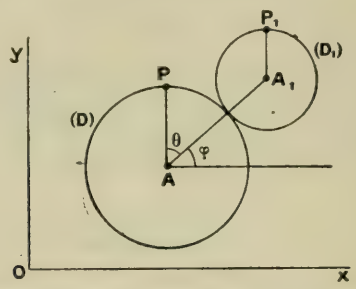
Cas où la fixité de l'axe est obtenue par celle de deux de ses points : détermination des percussions subies par ces points.

Centre de percussion.

III. *Deux disques circulaires infiniment minces* (D) *et* (D_1), *homogènes et pesants, glissent sans frottement sur un plan horizontal* xOy. *Ils sont assujettis, de plus, à rouler (sans glisser) l'un sur l'autre. Leurs masses* M *et* M_1 *sont inversement proportionnelles à leurs rayons* R *et* R_1, *et chaque point matériel de ces disques est attiré par l'origine* O *proportionnellement à sa masse et à sa distance au point* O, *le coefficient de proportionnalité étant égal à* ω^2.

On désignera par ξ, η *les coordonnées du centre de gravité du système des deux disques, par* φ *l'angle du segment* $\overline{AA_1}$ *avec* Ox, *et par* θ *l'angle que fait avec* $\overline{AA_1}$ *le*

rayon matériel $\overline{AP}$ *qui, à l'époque initiale, coïncidait avec* $\overline{AA_1}$. *Ces angles sont comptés positivement dans le sens de* Ox *vers* Oy.



Étudier le mouvement du système avec les conditions initiales suivantes :

$$\xi_0 = 2R, \qquad \eta_0 = 0, \qquad \varphi_0 = 0, \qquad \theta_0 = 0,$$
$$\xi'_0 = 0, \qquad \eta'_0 = 2R\omega, \qquad \varphi'_0 = \omega, \qquad \theta'_0 = -2\omega.$$

Quels sont, au point de vue cinématique, et pour ces conditions initiales, les mouvements absolus des centres (D) *et* (D_1)?

Épreuve pratique. — Mouvement d'un tore autour d'un point fixe. — *Un tore, homogène et pesant, dont le cercle générateur a un rayon* $\alpha = 2^{cm}$ *et a son centre à une distance* $d = 15^{cm}$ *de l'axe de rotation, tourne avec une vitesse de* 5000 *tours par minute autour de cet axe. La distance* l *de son centre de masse au point fixe de cet axe est* 1^{cm}, *et l'inclinaison initiale* θ_0 *de l'axe sur la verticale ascendante est de* 50 *grades.*

Déterminer la durée T *et l'amplitude* Θ *de la nutation, la vitesse* Ψ' *de la précession moyenne et le temps* T' *que l'axe du tore met à faire une révolution complète autour de la verticale.*

$$g = 981\left(\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}\right).$$

(Juillet 1907.)

Caen.

Épreuve théorique. — I. *Un octaèdre régulier homogène, de masse* M, *d'arête* $a\sqrt{2}$, *peut tourner autour du som-*

met O *qui est fixe: aucun de ses points n'est sollicité par des forces extérieures, sauf le sommet* S, *opposé à* O, *qui est attiré vers un point fixe* P *par une force* $\frac{1}{3}\frac{M\omega^2 a^4}{\overline{SP}^3}$, OP *étant égal à* $4a$; *à l'instant initial, l'octaèdre tourne avec la vitesse* ω *autour de l'axe instantané* OS *et* POS *est droit. Mouvement de l'octaèdre : trajectoire du point* S.

Solution.

Moments d'inertie en O : $A = B = \frac{6}{5}Ma^2$, $C = \frac{1}{5}Ma^2$.

Les théorèmes généraux donnent :

$$r = \varphi' + \psi' \cos\theta = \omega, \qquad \frac{6}{5}Ma^2\psi' \sin^2\theta + \frac{1}{5}Ma^2 r\cos\theta = 0,$$

$$\frac{6}{5}Ma^2(\theta'^2 + \psi'^2\sin^2\theta) = \frac{Ma^2\omega^2}{12}\left(\frac{1}{5 - 4\cos\theta} - \frac{1}{5}\right).$$

On trouve, pour la trajectoire du point S :

$$\sin\theta\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{\sqrt{\cos\theta(5 - 4\cos\theta)}}{\sqrt{(1 - 2\cos\theta)(2 - \cos\theta)}}.$$

II. *Un point* M, *de masse* 1, *se meut sur l'axe* X'OX *sous l'action d'une force* $X = -\varphi(x)$; *il éprouve, en sens contraire de sa vitesse, une résistance* $\frac{2v^2}{a + x}$, a *étant une constante positive; pour* $t = 0$, v *est nul,* x *a une valeur positive* x_0. *Déterminer* $\varphi(x)$ *de manière que* M *arrive à l'origine* O *en un temps* T *indépendant de* x_0; *dire en quel point il s'arrête et quelle est l'équation du mouvement ultérieur.*

Solution.

$$d\frac{1}{2}v^2 = \frac{2v^2\,dx}{a + x} - \varphi(x)\,dx,$$

l'analyse de V. Puiseux donne $\varphi(x) = \frac{\pi^2 x(a + x)}{4T^2}$; puis on trouve

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a + x} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a + x_0}\right)\cos\frac{\pi t}{2T}.$$

M s'arrête pour $x = -\frac{ax_0}{a + 2x_0}$; pour l'équation du mouvement ultérieur, on change le signe du deuxième terme : il n'y a plus tautochronisme.

Épreuve pratique. — *Un fil homogène, long de* 2^m, *pesant* 2^g, *a ses extrémités fixées en deux points* A, B *d'une horizontale; il porte un anneau* M *pesant* 2^g *et pouvant glisser sur le fil. Calculer, à* $0^m,0001$ *près, la distance* AB *et la distance de cette droite au point qui supporte l'anneau.*

(Juillet 1907.)

Grenoble.

Problème. — *Un solide* S *est mobile autour d'un axe vertical fixe dirigé vers le bas. Un second solide* S′ *est mobile autour d'un axe horizontal* Ox *invariablement lié à* S *et rencontrant* Oz_1 *au point* O. *L'axe* Ox *est axe principal d'inertie de* S′ *relativement au point* O; *les deux autres axes principaux sont appelés* Oy *et* Oz.

Soient Ox_1 Oy_1 *deux axes rectangulaires horizontaux fixes; on désigne par* ψ *l'angle* $\widehat{x_1Ox}$ *et par* θ *l'angle* $\widehat{z_1Oz}$. *On appelle* I *le moment d'inertie de* S *relativement à* Oz_1, A, B, C *ceux de* S′ *relatifs à* Ox, Oy *et* Oz. *Le centre de gravité* G *de* S′ *est supposé situé sur* Oz *à une distance* a *du point* O.

Le solide S′ *est pesant et les liaisons sont sans frottement.*

Écrire les équations différentielles du mouvement du système; montrer qu'elles s'intègrent par quadratures. On ne demande pas de discussion.

Les réactions correspondant aux liaisons auxquelles S′ *est assujetti sont réductibles à une force passant par* O *et à un couple. Montrer que l'axe de ce couple est normal au plan* xOz_1 *et indiquer une méthode pour calculer le moment de ce couple.*

Solution.

Les équations différentielles s'obtiennent aisément, soit par la méthode de Lagrange, soit par les théorèmes généraux.

En ce qui concerne les réactions de S', les liaisons permettent à chaque instant une rotation autour de Oz_1 et une rotation autour de Ox; le moment des forces de liaisons relatif à ces deux axes est donc nul. On connaît dès lors la direction de l'axe du couple des réactions, on en calcule le moment en utilisant, par exemple, les équations d'Euler relatives à S' et aux axes Oy et Oz.

Épreuve pratique. — *Deux cercles homogènes de même masse m, de même rayon a, sont assujettis à rester dans un plan vertical et à rouler sans glisser sur une horizontale fixe de ce plan. Leurs centres* C, C' *sont réunis par une barre homogène de masse* M, *de longueur* l ($l > 2a$). *De plus, deux points* B, B' *de ces cercles, situés à la même distance b de leurs centres, sont réunis par une barre de masse* μ, *de même longueur que la précédente. Cette barre* BB' *est une bielle d'accouplement : la figure* CBB'C' *est donc un parallélogramme articulé.*

Exprimer l'absence de glissement par une relation liant l'abscisse x du milieu A *de* CC' *et l'angle* θ *que fait* CB *avec* Ox. *Quelle doit être une force appliquée en* A *pour maintenir le système en équilibre, l'angle* θ *ayant une valeur donnée ?* (*Les diverses pièces du système sont pesantes.*)

Calculer la force vive du système en mouvement en fonction de θ *et de* $\frac{d\theta}{dt} = \theta'$. *Former l'équation du mouvement du système, les forces données se réduisant aux poids des différentes pièces.*

Trouver la durée des petites oscillations au voisinage d'une position d'équilibre stable.

Le système étant au repos dans une position d'équilibre stable, on suppose qu'un point matériel de masse m' animé d'une vitesse V *faisant avec* Ox *un angle de* 30° *et dirigée vers le bas vienne heurter la barre* CC' *en son milieu et reste fixé en ce point. Déterminer la distribution des vitesses dans le système ainsi modifié, immédiatement après le choc.*

Nota. — *Les liaisons sont sans frottement.*

(Juillet 1907.)

Lille.

Cours. — 1° *Variation de la force vive d'un solide libre à la suite d'une percussion. Introduction du paramètre de percussion.*

2° *Conservation de la force vive dans le choc de deux corps libres parfaitement élastiques. Perte de force vive dans le choc de deux corps libres quelconques.*

Problèmes. — I. Cinématique. — *Soient dans un plan fixe* Ox, Oy *deux axes rectangulaires; le plan d'un angle droit* $X\Omega Y$ *se meut sur ce plan fixe. Le sommet* Ω, *de coordonnées* (a, b) *par rapport à* Ox, Oy, *décrit la parabole* $b^2 = 2pa$; *l'angle* α *de* ΩX *avec* Ox *a pour mesure* $-\frac{b}{p}$ *en fonction de la position de* Ω *et* $m \log(1+t)$ *en fonction du temps* t (p *et* m *sont deux constantes*). *Déterminer analytiquement la base, la roulante, le lieu du centre géométrique des accélérations et le lieu du centre proprement dit des accélérations.*

II. Dynamique. — *Un ellipsoïde homogène pesant à surface dépolie est mobile autour de son centre; il reste en contact avec un plan dépoli sur lequel il roule et pivote sans glisser. Étudier son mouvement et reconnaître qu'il coïncide avec un mouvement de Poinsot. On néglige les frottements de roulement et de pivotement.*

(Juillet 1907.)

Marseille.

Épreuve théorique. — *Un canal circulaire homogène peut tourner autour de l'un de ses diamètres qui est vertical et qui est fixe.*

Dans ce canal se meut un point pesant dont la masse est la moitié de celle du canal.

Trouver le mouvement de ce système et la pression du point sur le canal.

A l'instant initial, le rayon qui passe par le point est horizontal, la vitesse relative du point sur le canal est nulle, et le canal tourne avec une vitesse angulaire ω

telle que $g = R\omega^2$, *en désignant par* g *l'accélération due à la pesanteur et par* R *le rayon du canal.*

Le mouvement est-il ou n'est-il pas périodique?

Solution.

Soit φ l'angle du plan du canal avec un plan vertical fixe, soit θ l'angle que fait avec l'horizontale le rayon qui passe par le point mobile; cet angle étant compté au-dessous de l'horizontale, le théorème des moments donne

$$(1 + \cos^2\theta)\varphi' = 2\omega.$$

Le théorème des forces vives donne

$$(1 + \cos^2\theta)\varphi'^2 + \theta'^2 = 2\omega^2 \sin\theta + 2\omega^2.$$

On tire de là

$$\theta'^2 = \frac{2\omega^2 \sin\theta(2 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)}{1 + \cos^2\theta}.$$

Donc θ part de zéro et tend vers $\frac{\pi}{2}$ quand t augmente indéfiniment.

Le mouvement n'est pas périodique, et $\frac{d\varphi}{dt}$ tend vers 2ω, c'est-à-dire vers le double de la vitesse initiale.

Épreuve pratique. — *Un tube creux en fer est horizontal. Il est encastré par l'une de ses extrémités dans un mur vertical; il porte à l'autre extrémité un poids* P.

La partie saillante du tube a 3^m *de long. Le rayon intérieur du tube est* 2^{cm}, *le rayon extérieur est* 3^{cm}. *Le poids spécifique du fer est* 7,7.

On demande quel sera le poids P *si le tube travaille au maximum à* 10^{kg} *par millimètre carré, et quel sera alors l'abaissement de l'extrémité libre du tube.*

On tiendra compte du poids du tube.

(Juillet 1907.)

Montpellier.

Épreuve théorique. — I. *Supposant connus le principe des vitesses virtuelles et le théorème de d'Alembert, éta-*

blir les équations de Lagrange dans le cas d'un système holonome.

Considérer le cas d'un système non holonome.

II. *Une circonférence de cercle, parfaitement rigide, de rayon égal à l'unité, est animée d'un mouvement de rotation uniforme, de vitesse angulaire* ω, *autour d'un axe fixe passant par son centre et perpendiculaire à son plan. Un point matériel non pesant* M, *de masse égale à l'unité, mobile dans le plan de la circonférence, glisse sans frottement sur le côté intérieur de cette circonférence. Ce point est relié à un point* A, *fixe sur la circonférence, par un fil élastique sans masse. Lorsque le fil a pour longueur* 1, *sa tension est nulle; lorsque sa longueur est égale à* l, *sa tension est* $k(l-1)$, k *étant une constante positive. Le point* M *étant placé à la distance* λ *du point* A, *on le lance sur la circonférence avec la vitesse relative* v_0. *Étudier le mouvement relatif du point* M *sur la circonférence; reconnaître si, au début du mouvement, le point quitte la circonférence. Si ce cas se présente, on ne poursuivra pas l'étude du mouvement.*

Épreuve pratique. — *On considère le mouvement du plan* P *sur un plan fixe* Π.

On suppose que le point J *de* P, *dont l'accélération est nulle, coïncide à chaque instant avec un point fixe de* P, *et que le centre instantané* I *décrit sur* P *une droite fixe* D.

Trouver des trajectoires sur le plan Π *des points* I *et* J.

Rennes.

Épreuve théorique. — I. *Établir les équations d'Euler pour le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. Intégrales premières dans le cas où il n'existe pas de forces extérieures.*

II. *Étudier le mouvement de la machine d'Atwood, en tenant compte du poids du fil.*

On supposera que la machine se réduit à une poulie sur laquelle passe un fil matériel homogène, pesant,

dont les extrémités pendent verticalement et supportent des poids inégaux.

Épreuve pratique. — *Une plaque carrée homogène pesante peut osciller librement autour d'un de ses côtés. Trouver la période des oscillations : 1° quand le côté considéré est vertical ; 2° quand il forme avec l'horizon un angle donné* φ.

Application numérique :

$$\varphi = 45^\circ,$$

$$\text{côté du carré} = 1^{\text{m}},$$

$$g = 9{,}81 \left(\frac{m}{\text{séc}^2}\right).$$

(Juin 1907.)

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Caen.

On considère la surface S *définie, en coordonnées rectangulaires, par les équations*

$$x = e^{-u}\cos v, \qquad y = e^{-u}\sin v, \qquad z = \int_0^u du\sqrt{1 - e^{-2u}}.$$

1° *Effectuer l'intégration qui donne la valeur de* z;

2° *Montrer que* S *est de révolution autour de* OZ *et que la portion d'une tangente à une méridienne comprise entre* OZ *et le point de contact a une longueur constante. Forme de la méridienne : calcul de son rayon de courbure;*

3° *Déterminer les asymptotiques de* S : *projection, sur* OXY *des asymptotiques se croisant au point où* u *et* v *sont nuls.*

Solution.

$$z = \mathrm{L}\left(e^u + \sqrt{e^{2u} - 1}\right) - \sqrt{1 - e^{-2u}}.$$

3° $$dz = -\sqrt{e^{2u} - 1}\,(\cos v\,dx + \sin v\,dy).$$

On en déduit p, q et l'on forme l'équation

$$dp\,dx + dq\,dy = 0;$$

le rayon vecteur r d'un point de la projection est e^{-u} et l'équation de cette projection sur OXY

$$dv = \pm \frac{dr}{r\sqrt{1-r^2}}.$$

(Juillet 1907.)

Lille.

I. Analyse. — 1° *Ox, Oy et Oz étant trois axes rectangulaires, construire la lemniscate* (C) *représentée par les équations*

$$(1) \qquad (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2), \qquad z = 0,$$

où a désigne une longueur donnée; montrer qu'il existe sur Ox deux points F, F′ *tels que le produit des distances d'un point quelconque de la lemniscate à* F *et* F′ *ait une valeur constante.*

2° *Écrire l'équation de la surface de révolution* (S) *engendrée par la rotation de* (C) *autour de Ox, indiquer la forme de l'intersection de* (S) *et d'un plan parallèle à xOy.*

3° *Calculer le volume de la portion de l'espace intérieure à cette surface* (S).

4° *Former et intégrer l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des lemniscates représentées par l'équation* (1) *quand a varie, construire l'une de ces trajectoires orthogonales.*

5° *Calculer le volume de la portion de l'espace limitée par la sphère* (Σ):

$$x^2+y^2+z^2 = a^2$$

et par le cylindre qui a pour base la lemniscate (C) *et dont les génératrices sont parallèles à Oz ainsi que l'aire de la partie de la surface de* (Σ) *comprise à l'intérieur du cylindre.*

II. Mécanique. — 1° *Théorème des moments des quan-*

tités de mouvement pour un point matériel et pour un système. Équation du mouvement d'un solide mobile sans frottement autour d'un axe fixe.

2° *On donne le poids* P *d'un solide* S *qui peut osciller librement autour d'un axe fixe horizontal* OZ, *la distance* OG $= a$ *du centre de gravité* G *de ce solide à l'axe* OZ, *la durée* t *des petites oscillations du pendule ainsi obtenu, le poids* p *et le rayon* r *d'une sphère homogène* C; *et l'on demande de déterminer la durée* x *des petites oscillations du deuxième pendule obtenu en fixant invariablement la sphère* C *au solide* S, *de façon que son centre* C *soit sur le prolongement de* OG *à une distance* OC $= b$ *de l'axe* OZ.

On prendra

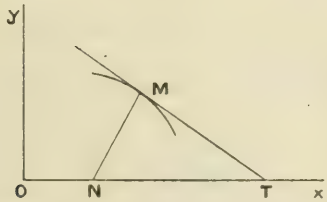
$$P = 5^{kg}, \qquad a = 1^{m},5, \qquad t = 1^{s},4,$$
$$p = 3^{kg}, \qquad r = 0^{m},07, \qquad b = 2^{m},4.$$

(Juillet 1907.)

Lyon.

Poser l'équation différentielle des courbes C *telles que*

$$OT.ON = c^2 = \text{const.}$$



On intégrera en posant $x^2 = u$, $y^2 = v$.

Par un point P *du plan passent deux courbes* C_1 *et* C_2. *Si* P *a pour coordonnées* $x = c$, $y = \frac{c}{\sqrt{2}}$, C_1 *est une ellipse,* C_2 *est une hyperbole.* C_2 *divise* C_1 *en trois parties, dont on demande de calculer les aires.*

SOLUTION.

On a

$$\mathrm{OT} = x - \frac{y}{y'}, \qquad \mathrm{ON} = x + yy',$$

(1) $$x^2 - y^2 + xy\left(y' - \frac{1}{y'}\right) = c^2.$$

c'est-à-dire

(2) $$c^2 = u - v + \frac{u\,dv^2 - v\,du^2}{du\,dv}.$$

Traitons u et v comme des coordonnées avec $p = \frac{dv}{du}$. On a l'équation de Clairaut

(3) $$\left\{\begin{array}{l} v = pu - c^2\dfrac{p}{1+p} \\ \text{ou} \\ up^2 - p(v - u + c^2) - v = 0. \end{array}\right.$$

Les courbes intégrales de (3) sont les tangentes à la conique H

$$0 = (v - u + c^2)^2 + 4uv;$$

les courbes intégrales de (1) sont donc des coniques h, orthogonales, homofocales

$$c^2\frac{p}{1-p} = px^2 - y^2 \qquad (p = \text{paramètre arbitraire})$$

à foyers fixes $y = 0$, $x = \pm c$, etc. (Juillet 1907.)

Montpellier.

Une courbe est représentée par rapport à deux axes rectangulaires par les équations

$$x = a(t - \sin t),$$
$$y = a\cos t.$$

1° *Calculer la longueur de l'arc de courbe compris entre les points correspondant à* $t = -\pi$ *et* $t = +\pi$.

2° *En un point quelconque* M, *déterminer le centre de courbure* C *et le rayon de courbure.*

3° *Trouver le lieu du centre de courbure, et montrer que ce lieu, et la première courbe, ont des formes identiques.*

4° C *étant le centre de courbure au point* M *de la première courbe, trouver le lieu du milieu de la droite* MC.

5° *Trouver l'enveloppe de la droite perpendiculaire à* MC *menée par son milieu.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère l'ellipsoïde de révolution engendré par la rotation de l'ellipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

autour de Ox, *puis un cône de révolution autour du même axe, circonscrit à l'ellipsoïde précédent. On prend pour base de ce cône le plan engendré par* Oy *en vertu de la même rotation.*

Minimum du volume de ce cône?

On étudiera plus généralement la variation de ce volume en faisant usage d'une représentation graphique.

N. B. — *On prendra pour variable* α, *la distance du sommet du cône au point* O. (Juillet 1907.)

Rennes.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On donne l'équation différentielle*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{a}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) y = 0,$$

où a et b désignent deux constantes positives.

1° *Trouver une solution* $y = f(x)$ *de cette équation, telle que pour* $x = 0$ *on ait*

$$y = h \qquad \text{et} \qquad \frac{dy}{dx} = 0.$$

2° *Construire la courbe qui représente la variation de la fonction* $y = f(x)$ *ainsi déterminée, en supposant que* x *croisse de* 0 *à* $+\infty$. *Calculer les coordonnées des points où*

la tangente est parallèle à Ox *et les valeurs du rayon de courbure en ces mêmes points.*

II. *Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{a}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{a^2}y = e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}},$$

a et c désignant deux constantes positives.

Examiner les cas particuliers où $c = \pm a$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère l'enveloppe de la droite définie par l'équation*

$$x \sin\alpha - y \cos\alpha = 2\alpha \sin\alpha + 2\cos\alpha,$$

α *désignant un paramètre variable.*

Trouver : 1° *les coordonnées d'un point de l'enveloppe en fonction du paramètre* α;

2° *La longueur d'arc comptée à partir du point correspondant à* $\alpha = 0$;

3° *L'expression du rayon de courbure.*

(Novembre 1906.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Trouver l'intégrale générale du système d'équations différentielles*

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = +\sqrt{a^2 - y^2}, \\ \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{a^2 - y^2}{y}. \end{cases}$$

Montrer que, si l'on détermine les constantes d'équation de manière à satisfaire aux conditions initiales suivantes :

pour $t = \frac{\pi}{2}$

$$x = 0, \qquad y = a,$$

on a

$$(2) \qquad y = a \sin t, \qquad x = a \log \operatorname{tang} \frac{t}{2} + a \cos t.$$

Étudier la courbe définie par les équations (2).

Calculer en fonction de t : 1° l'angle de la tangente avec Oy; 2° la longueur de l'arc compté à partir du point A qui correspond à la valeur $t = \frac{\pi}{2}$; 3° le rayon de courbure; 4° les coordonnées du centre de courbure; 5° l'aire comprise entre la courbe, l'axe des y, l'axe des x et une ordonnée variable : cette aire tend vers une valeur déterminée quand l'ordonnée limite s'éloigne indéfiniment. Reconnaître la nature de la développée.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Intégrer l'équation différentielle linéaire*

$$y' - \frac{1 + 3x^2}{x(1 + x^2)} y = \frac{x(1 - x^2)}{1 + x^2},$$

et déterminer la constante de façon que l'on ait $y = 0$ pour $x = 1$.

2° *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}.$$

(Juin 1907.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

M. A. Gérardin ayant réimprimé dans le Sphinx Œdipe *(Nancy) trois questions de M. E. Cesaro, relatives à certaines propriétés arithmétiques du Tableau des puissances de 5, et demeurées non résolues, M. Malo a réussi à les résoudre et les solutions viennent d'être publiées dans le Journal sus-mentionné. Ces questions ayant été proposées ici même en 1883 et 1884, il est naturel que leur solution y soit aussi insérée.* LA RÉDACTION.

1432.

(1883, p. 111.)

Parmi les chiffres de rang $4p + 1$ des puissances successives de 5, les chiffres 3 et 8 se trouvent en plus petit nombre

que les autres. Par exemple, parmi les 640 *chiffres de rang* 9 (*centaines de millions*) *de* 640 *puissances successives quelconques de* 5, *chacun des chiffres* 3 *et* 8 *se trouve* 60 *fois, tandis que chacun des* 8 *autres chiffres s'y trouve* 65 *fois.* (E. Cesaro).

1448.

(1883, p. 287.)

Les chiffres de rang n, dans les puissances successives d'un nombre quelconque, se reproduisent périodiquement. Pour les puissances de 5, *la période se compose de* 2^{n-2} $(n > 3)$ *termes dont la somme est le double de* $9.2^{n-4} - 1$. *Dans cette période, un même chiffre est répété* $\frac{1}{5}(2^{n-3} + \varphi)$ *fois;* φ *ayant, pour chaque chiffre, des valeurs différentes suivant la forme de n, comme l'indique le Tableau suivant. On a*

		$n = 4p.$	$n = 4p + 1.$	$n = 4p + 2.$	$n = 4p + 3.$
Pour 0 et 5.	$\varphi =$	3	1	2	-1
» 1 et 6.	$\varphi =$	-2	1	-3	4
» 2 et 7.	$\varphi =$	-2	1	2	-1
» 3 et 8.	$\varphi =$	3	-4	2	-1
» 4 et 9.	$\varphi =$	-2	1	-3	-1

(E. Cesaro.)

1485.

(1884, p. 160.)

Ayant pris, au hasard, un chiffre d'une puissance quelconque de 5, *il y a avantage à parier que c'est un* 5 *ou un* 0. (E. Cesaro.)

SOLUTION

Par M. E. Malo.

1. On peut regarder comme un simple point de fait tranché par l'expérience que le chiffre des unités est toujours un 5, celui des dizaines toujours un 2, et celui des centaines un 1 dans les puissances impaires, un 6 dans les puissances paires.

Considérant une de celles-ci, soit

$$5^{2n} = 1000\,A_n + 625,$$

j'en conclurai

$$5^{2n+1} = 1000(5A_n + 3) + 125 = 1000B_n + 125,$$

puis, en multipliant encore par 5,

$$5^{2n+2} = 1000.5B_n + 625 = 1000A_{n+1} + 625:$$

il me vient donc

$$A_{n+1} = 5B_n = 25A_n + 15,$$

et, sans nouveau calcul,

$$B_{n+1} = 25B_n + 3.$$

Or je puis considérer que, pour $n = 2$, j'ai $A_2 = 0$; j'aurai par conséquent

$$A_3 \equiv 5, \quad A_4 \equiv 0, \quad A_5 \equiv 5, \quad \ldots \quad (\text{mod. } 10).$$

De cette même valeur je tire

$$B_2 = 3, \quad B_3 \equiv 8, \quad B_4 \equiv 3, \quad B_5 \equiv 8, \text{ etc. } (\text{mod. } 10).$$

Il est de la sorte acquis que l'on a

$$\begin{aligned} 5^{4n} &= 10000A_n + 0625, \\ 5^{4n+1} &= 10000B_n + 3125, \\ 5^{4n+2} &= 10000C_n + 5625, \\ 5^{4n+3} &= 10000D_n + 8125, \end{aligned}$$

et il est également clair que l'on a les relations,

$$B_n = 5A_n, \quad C_n = 5B_n + 1, \quad D_n = 5C_n + 2,$$
$$A_{n+1} = 5D_n + 4.$$

Or on peut commencer à $B_1 = 0$, d'où

$$C_1 = 1, \quad D_1 = 7,$$

puis

$$A_2 \equiv 9, \quad B_2 \equiv 5, \quad C_2 \equiv 6, \quad D_2 \equiv 2, \quad A_3 \equiv 4, \quad \ldots \quad (\text{mod. } 10).$$

On posera donc

$$\begin{aligned}
5^{8n} &= 100000\,A_n + 90625,\\
5^{8n+1} &= 100000\,B_n + 53125,\\
5^{8n+2} &= 100000\,C_n + 65625,\\
5^{8n+3} &= 100000\,D_n + 28125,\\
5^{8n+4} &= 100000\,E_n + 40625,\\
5^{8n+5} &= 100000\,F_n + 03125,\\
5^{8n+6} &= 100000\,G_n + 15625,\\
5^{8n+7} &= 100000\,H_n + 78125,
\end{aligned}$$

avec les relations

$$\begin{aligned}
B_n &= 5\,A_n + 4, & C_n &= 5\,B_n + 2,\\
D_n &= 5\,C_n + 3, & E_n &= 5\,D_n + 1,\\
F_n &= 5\,E_n + 2, & G_n &= 5\,E_n,\\
H_n &= 5\,G_n, & A_{n+1} &= 5\,H_n + 3;
\end{aligned}$$

et, comme on peut faire $H_0 = 0$, il s'ensuivra

$$\begin{aligned}
&A_1 \equiv 3, \quad B_1 \equiv 9, \quad C_1 \equiv 7, \quad D_1 \equiv 8, \quad E_1 \equiv 1,\\
&F_1 \equiv 7, \quad G_1 \equiv 5, \quad H_1 \equiv 5, \quad A_2 \equiv 8, \text{ etc. } (\text{mod. } 10).
\end{aligned}$$

2. Le même raisonnement s'applique indéfiniment, on le sent d'une façon très claire, et la difficulté gît surtout dans l'invention d'un algorithme permettant de se débarrasser complètement de la considération des nombres effectifs. Cependant, en admettant que les nombres de la forme $5^{n.2^{m-2}+p}$ $(0 \leqq p \leqq 2^{m-2} - 1)$ soient également de la forme suivante

$$10^m A_{n,p} + a_p,$$

les nombres $a_p (< 10^m)$ formant une suite périodique de 2^{m-2} termes non décomposable en sous-périodes, quelles seront d'une façon générale les conséquences de cette hypothèse?

On aura, conformément à ce qui a déjà été observé,

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned}
5\,a_p &= 10^m \alpha_1 + a_{p+1},\\
5\,a_{p+1} &= 10^m \alpha_2 + a_{p+2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
5\,a_{p+k-1} &= 10^m \alpha_k + a_{p+k},
\end{aligned} \right.$$

et

$$(2)\quad \begin{cases} A_{n,p+1} = 5A_{n,p} + \alpha_1, \\ A_{n,p+2} = 5A_{n,p+1} + \alpha_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ A_{n,p+k} = 5A_{n,p+k-1} + \alpha_k. \end{cases}$$

Les égalités du premier groupe montrent que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont les chiffres de dizaines dans le produit par 5 du premier chiffre à gauche des nombres de m chiffres a_p, a_{p+1}, $a_{p+2}, \ldots$; ce sont donc les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, s'offrant dans un certain ordre. D'autre part, les égalités du deuxième groupe présentent α_k comme le reste de la division de $A_{n,p+k}$ par 5, division dont $A_{n,p+k-1}$ est le quotient; ou encore, puisque l'on peut écrire

$$(3)\quad \begin{cases} A_{n,p+2} = 25A_{n,p} + 5\alpha_1 + \alpha_2, \\ A_{n,p+3} = 125A_{n,p} + 25\alpha_1 + 5\alpha_2 + \alpha_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{n,p+k} = 5^k A_{n,p} + 5^{k-1}\alpha_1 + 5^{k-2}\alpha_2 \\ \qquad + 5^{k-3}\alpha_3 + \ldots + 5\alpha_{k-1} + \alpha_k, \end{cases}$$

il est clair que $A_{n,p}$ est le quotient de la division par 5^k de $A_{n,p+k}$ et que le reste, dans le système de numération de base 5, s'écrit $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k$.

L'égalité générale du groupe (2)

$$A_{n,p+k} = 5A_{n,p+k-1} + \alpha_k,$$

considérée relativement au diviseur 10, fait voir que, *si* $A_{n,p+k-1}$ *est pair, le dernier chiffre de* $A_{n,p+k}$ *est précisément* α_k, *tandis que ce dernier chiffre, lorsque* $A_{n,p+k-1}$ *est impair, est* $\alpha_k + 5$. Enfin, comme la suite des derniers chiffres des nombres $A_{n,p}$, $A_{n,p+1}$, $A_{n,p+2}$, ..., $A_{n,p+k}$, est précisément celle des chiffres de la colonne 10^m dans le Tableau des puissances successives de 5, elle se confond aussi avec celle des nombres $\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k$, modifiée de la façon qui vient d'être expliquée et α_0 désignant ici le chiffre des unités dans $A_{n,p}$.

Lorsque k atteindra la valeur de $2^{m-2} - p$ il y aura lieu d'augmenter la valeur de n d'une unité et de remplacer $p + k$ par 0, $p + k + 1$ par 1, etc. Mais, sans insister sur ce

point, qui est secondaire, je remarque que, pour $k = 2^{m-2}$, on retombe sur la valeur initiale de p tandis que celle de n est augmentée d'une unité. On recommence dès lors une nouvelle série de chiffres $\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \ldots$ (ces chiffres devant être modifiés l'un d'après l'autre comme il a été expliqué un peu plus haut) et *toute la question est de savoir si* $A_{n+1,p}$ *est de même parité que* $A_{n,p}$ *ou de parité différente,* car dans le premier cas la période serait formée par la série des chiffres $\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \ldots$ (naturels ou majorés de 5), et ne comprendrait que 2^{m-2} termes, tandis que dans le second elle comprendrait en outre une deuxième série de chiffres $\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{k-1}\ \alpha_k \ldots \alpha_{2^{m-2}-1}$, *le chiffre* α_k *dans cette deuxième série étant majoré de* 5 *s'il ne l'a pas été dans la première, et réciproquement.* Or c'est le deuxième cas qui s'offre essentiellement comme le montre la relation suivante, simple particularisation de l'équation générale du groupe (3),

$$A_{n+1,p} = 5^{2^{m-2}} A_{n,p} + (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_{2^{m-2}}),$$

où $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_{2^{m-2}})$, qui désigne le nombre écrit dans le système de numération de base 5 au moyen des chiffres successifs α_1, α_2, α_3, ..., est un nombre nécessairement impair.

En effet des égalités (1) on déduit

$$\begin{aligned}
a_{p+2} &= 25 a_p - 10^m (5\alpha_1 + \alpha_2);\\
a_{p+3} &= 125 a_p - 10^m (25\alpha_1 + 5\alpha_2 + \alpha_3),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{p+k} &= 5^k a_p - 10^m (5^{k-1}\alpha_1 + 5^{k-2}\alpha_2 + \ldots + 5\alpha_{k-1} + \alpha_k),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire, suivant la notation introduite il n'y a qu'un instant,

$$(4) \qquad (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_k) = \frac{5^k a_p - a_{p+k}}{10^m},$$

et, pour $k = 2^{m-2}$,

$$(5) \qquad (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_{2^{m-2}}) = \frac{(5^{2^{m-2}} - 1) a_p}{10^m}.$$

Or il est clair, d'abord, que a_p, nombre terminé par un 5, est nécessairement divisible par 5^m, puisque $5^{2^{m-2}} - 1$ ne peut admettre le facteur 5; ensuite, que $5^{2^{m-2}} - 1$, égal à

$$(2^2 + 1)^{2^{m-2}} - 1,$$

est *exactement* divisible par 2^m et donne pour quotient un nombre impair.

Il est donc établi que *le fait que les chiffres qui sont les coefficients de* 10^m *dans* $5^{n.2^{m-2}+p}$ *forment une suite périodique de* 2^{m-1} *termes qui n'est pas décomposable en sous-périodes implique que les chiffres qui sont les coefficients de* 10^{m+1} *dans* $5^{n.2^{m-1}+q}$ *forment une suite périodique de* 2^m *termes dont la deuxième moitié résulte de la première, chaque chiffre de celle-ci étant augmenté de* 5 *s'il est moindre que* 5, *et diminué de* 5 *s'il est égal ou plus grand.*

3. Certains points cependant demandent à être éclaircis et pour bien s'affermir sur les considérations qui viennent d'être développées il est utile d'en faire une application immédiate : à cet effet, je me proposerai de déterminer la période des chiffres composant la septième colonne du Tableau, c'est-à-dire multipliant 10^6 dans les puissances successives de 5. Pour simplifier je prendrai $a_p = 5^6$ de manière à avoir $5^{-6} a_p = 1$; je n'aurai donc à m'occuper que du nombre $\frac{5^{16}-1}{2^6}$, égal à $\frac{5^8-1}{2^5} \times (5^8+1) \times \frac{1}{2}$, en le considérant dans le système de numération de base 5. Or il est manifeste que $\frac{5^8-1}{2^5}$ est le nombre constituant la période du développement de 2^{-5} suivant les puissances négatives de 5; ce nombre, qu'on peut regarder comme un résultat déjà acquis, est 00342312, composé de huit figures comme on a établi que cela doit être, et c'est un nombre impair, en accord avec la démonstration de l'article 2. On doit le multiplier par 5^8+1 (= 100000001, en numération de base 5), c'est-à-dire l'écrire deux fois de suite

00342312003423 12,

puis le diviser par 2, ce qui donne

00143403224211 31,

après quoi il ne restera plus qu'à reproduire les chiffres obtenus tels quels ou majorés de 5, suivant la règle formulée à l'article 2,

00198403779761 81,

pour obtenir la première moitié de la période de 32 chiffres cherchée : la deuxième en résulte par l'addition de 5 aux chiffres moindres que 5 et par la soustraction de 5 opérée sur les chiffres $\geqq 5$. Il me vient donc pour cette deuxième moitié de la période

$$5564395822421636.$$

Semblablement, de $2^{-6} = 0{,}00143\ldots$ (base 5) on déduirait, en divisant par 2 le nombre

$$00143403224211310014340322421131,$$

la période de la fraction $2^{-6} = 0{,}000442\ldots$, savoir :

$$00044201334330402232142411210313,$$

puis la première demi-période de la colonne 10^7 :

$$00044201839835957782197961760363\,;$$

et enfin la seconde :

$$55599756384380402237642416215818.$$

4. Supposant que la puissance 5^n commence par les caractères $\lambda\mu\nu\ldots$, la puissance 5^{n+1} commencera par les caractères $\xi\eta\zeta\ldots$, savoir :

$$\xi = \left[\frac{\lambda}{2}\right], \qquad \eta = \left[\frac{\mu}{2}\right] \qquad (\text{pour } \lambda \text{ pair}),$$

et

$$\eta = 5 + \left[\frac{\mu}{2}\right] \qquad (\text{pour } \lambda \text{ impair}),$$

puis

$$\zeta = \left[\frac{\nu}{2}\right] \quad \text{ou} \quad 5 + \left[\frac{\nu}{2}\right],$$

suivant la parité de μ, etc.

La puissance 5^{n+1} s'exprime donc par un caractère de plus que la puissance 5^n, sauf si celle-ci commence à gauche par le chiffre 1. Cela montre que, considérant les colonnes, celles-ci peuvent être censées commencer par autant de zéros qu'il y a à leur droite de colonnes dont le premier chiffre

significatif, après les zéros envisagés ici par hypothèse même, est un 1. Cette seule remarque suffit à expliquer dans une certaine mesure la prédominance des 0 et des 5 dans les périodes.

D'une façon plus précise, les lignes peuvent être regardées comme débutant par autant de zéros qu'il y a d'unités dans le produit de leur rang par $\log 2 = 0,30103000$; les colonnes comme débutant par autant de zéros qu'il y a d'unités dans le produit de l'exposant de la puissance de 10 à laquelle chacune correspond par le rapport $\frac{\log 2}{\log 5} = \frac{30103}{69897} = 0,4306765$.

Ainsi, la puissance 5^6 peut être censée commencer par un zéro et la puissance 5^7 par deux zéros, parce que l'on a $6 \times 0,30103 = 1,80618$ et $7 \times 0,30103 = 2,10721$. De même la cinquième colonne commence par un zéro parce que l'on a $4 \times 0,4306765 = 1,72\ldots$ et la sixième commence par deux zéros parce que l'on a $5 \times 0,4306765 + 2,15\ldots$.

5. Dans les colonnes chaque chiffre est la moitié exacte ou par défaut du chiffre situé dans la colonne contiguë à droite et sur la ligne précédente, ou bien de ce chiffre augmenté de 10, suivant le cas. Cette remarque, en tant que bornée à ce qui vient d'être énoncé, est la répétition de ce qui a été observé plus haut au sujet de la formation des puissances successives, c'est-à-dire des lignes du Tableau. Mais la démonstration même de la périodicité des chiffres dans les colonnes établit en outre qu'en considérant une période entière, c'est-à-dire deux périodes de la colonne contiguë à droite, cette addition de 10 s'opérera dans la moitié des cas, soit 2^{m-2} fois pour la colonne 10^m; semblablement les divisions sans reste s'opéreront dans moitié des cas, soit encore 2^{m-2} fois pour la colonne 10^m [1].

Par conséquent, en désignant par S_m la somme des 2^{m-1} chiffres de la période de la colonne 10^m et par S_{m+1} la somme des 2^m chiffres de la période de la colonne 10^{m+1},

---

[1] Cela pourra paraître en contradiction avec l'observation même du Tableau des puissances de 5; mais c'est un désaccord apparent, résultat d'une extension qu'on aurait hâtivement donnée aux termes employés dans le texte, tandis que la démonstration, *restreinte à ses énonciations formelles*, est parfaitement exacte et fondée.

on aura

$$S_{m+1} = \tfrac{1}{2}(2S_m + 10.2^{m-1} + 2^{m-1}),$$

c'est-à-dire, après réductions,

$$S_{m+1} = 9.2^{m-2} + S_m.$$

En partant donc de $S_2 = 7$, on trouvera

$$\begin{aligned} S_3 &= 7 + 9 = 16, \\ S_4 &= 16 + 18 = 34, \\ S_5 &= 34 + 36 = 70, \\ S_6 &= 70 + 72 = 142, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

suite de valeurs qui mettent en évidence la relation

$$S_{m+1} = 2(S_m + 1).$$

Mais, reprenant la première expression trouvée, on peut écrire plus généralement

$$\begin{aligned} S_m &= 9.2^{m-3} + 9.2^{m-4} + 9.2^{m-5} + \ldots + 9.2^i + S_{i+2} \\ &= 9.2^i(2^{m-i-3} + 2^{m-i-4} + \ldots + 2 + 1) + S_{i+2} \\ &= 9.2^i(2^{m-i-2} - 1) + S_{i+2} \\ &= 9.2^{m-2} - 9.2^i + S_{i+2}. \end{aligned}$$

Faisant alors $i = 0$, on trouvera, à cause de $S_2 = 7$,

$$S_m = 9.2^{m-2} - 2.$$

6. Puisque la numération décimale emploie dix caractères, il est impossible que ceux-ci figurent tous en même nombre dans la période de 2^{m-1} termes qui est relative à la colonne 10^m, et il y a toujours un reste de 2, 4, 6 ou 8 unités. La plus grande égalité possible entre eux est qu'ils se présentent un nombre de fois marqué par

$$\frac{2^{m-1} - 2r}{10} = \frac{2^{m-2} - r}{5} \qquad (r = 1, 2, 3, 4 \text{ ou } r = \pm 1, 2),$$

sauf à $2r$ d'entre eux à se présenter une fois de plus (ou de moins). S'il en est ainsi, comme la somme des nombres d'un

seul chiffre en numération décimale est 45, la somme des chiffres de la période relative à la colonne 10^m sera

$$9.2^{m-2} - 9.r + \sigma,$$

en désignant par σ la somme des $2r$ chiffres employés une fois de plus (ou de moins) que la moyenne ; or la somme des chiffres de la période, d'après ce qui a été vu un peu plus haut, est

$$9.2^{m-2} - 2,$$

et par suite il me vient

$$\sigma = 9r - 2.$$

Si l'hypothèse est juste, il y a donc quatre cas à distinguer et seulement quatre cas, parce que la désinence du nombre a, pair et non divisible par 10, se reproduit dans $16a$. Par conséquent, pour $r = 1$ j'ai $\sigma = 7$, ce qui montre que les chiffres répétés au delà de la moyenne sont 1 et 6 ; ce cas correspond à la supposition $m \equiv 2 \pmod 4$. Pour $r = 2$ j'aurai $\sigma = 16$, et les chiffres en surnombre peuvent être ou bien 1, 2, 6, 7 ou bien 0, 3, 5, 8 : la supposition $m = 3$ montre que le dernier groupement est bien effectivement répétable lorsqu'on a $m \equiv 3 \pmod 4$.

Avec les valeurs négatives de r et de σ et en faisant $r = -1$, on a en valeur absolue $\sigma = 11$, de sorte que les nombres dont la fréquence est d'une unité inférieure à la moyenne sont 3 et 8 ; ce cas correspond à la supposition $m \equiv 0 \pmod 4$ et s'offre effectivement pour $m = 4$. En faisant $r = -2$, on trouve $\sigma = 20$ et les nombres de moindre fréquence peuvent être 1, 4, 6, 9 ou 2, 3, 7, 8 : l'exemple de $m = 5$ montre que le premier groupement peut venir en déficit pour toute valeur $m \equiv 1 \pmod 4$.

7. Les chiffres répétés en excédent de la fréquence moyenne étant

$$\text{pour} \left\{ \begin{array}{l} m \equiv 2 \\ m \equiv 3 \\ m \equiv 0 \\ m \equiv 1 \end{array} \right\} \pmod 4 \ldots \left\{ \begin{array}{l} 1, 6; \\ 0, 3, 5, 8; \\ 0, 2, 3, 5, 7, 8; \\ 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9; \end{array} \right.$$

on voit que, sur le total des vingt répétitions observées en plus de la fréquence moyenne dans les périodes appartenant à quatre colonnes consécutives quelconques, les divers chiffres se présentent également, c'est-à-dire *deux* fois, à l'exception de 0 et de 5 qui se représentent *trois* fois, et de 4 et 9 qui ne figurent qu'*une* seule fois. Donc, en pointant un chiffre au hasard dans le Tableau des puissances de 5, il y a avantage à parier que ce chiffre est un *zéro* ou un *cinq* et désavantage à parier que ce soit un *quatre* ou un *neuf*.

8. Les considérations développées dans les n°s 6 et 7 établissent quelles sont les conséquences de l'hypothèse de l'égale fréquence, aussi exactement réalisée que la nature des choses le comporte, dans les périodes relatives aux colonnes 10^m pour les puissances successives du nombre 5; mais, bien que cette hypothèse et ses conséquences se vérifient sur les puissances de 5 autant qu'on peut en calculer effectivement, il serait utile de démontrer par le raisonnement qu'on est en présence d'une véritable loi numérique. Cela du reste est facile et relève du procédé de démonstration par reconduction, si fréquemment employé en Mathématiques et déjà invoqué dans ce court Mémoire.

Je considère un indice quelconque dans la progression $m \equiv 2 \pmod 4$ et j'admets que dans la période de la colonne déterminée par cet indice chaque chiffre y figure le même nombre μ de fois, sauf 1 et 6, qui se présentent une fois de plus. Or il a été démontré que la période de la colonne suivante résultera de deux périodes consécutives de la période 10^m, tout chiffre 0 ou 1 donnant lieu à un 0 ou à un 5, tout chiffre 2 ou 3 à un 1 ou à un 6, tout chiffre 4 ou 5 à un 2 ou à un 7, tout chiffre 6 ou 7 à un 3 ou à un 8, tout chiffre 8 ou 9 à un 4 ou à un 9, et celle de ces alternatives qui ne se produit pas dans la première période se trouvant forcément vérifiée dans la seconde. Il en résulte que pour l'indice $m+1$ $[\equiv 3 \pmod 4]$ les chiffres se reproduisent 2μ fois; sauf 0, 3, 5, 8, qui reparaîtront une fois de plus. Pour la même raison, en passant à l'indice $m+2$ $[\equiv 0 \pmod 4]$, on trouvera que les chiffres sont tous reproduits 4μ fois, sauf 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, qui le sont une fois de plus; et de même encore, en considérant l'indice $m+3$ $[\equiv 1 \pmod 4]$, on conclura à la répétition $(8\mu+1)$ fois de tous les chiffres

à l'exception de 0, 2, 3, 5, 7, 8, qui s'offriront une fois de plus. Enfin, pour l'indice $m+4$ [$\equiv 2 \pmod 4$], les deux chiffres du système décimal s'offrent chacun $(16\mu - 3)$ fois, avec une répétition supplémentaire de 1 et de 6 ; on est retombé sur l'hypothèse initiale, qui, si elle est vérifiée une seule fois, et c'est ce qui a lieu pour les faibles indices, l'est ainsi perpétuellement.

Il resterait à vérifier que ces circonstances sont exprimées par la formule de M. E. Cesaro :

$$N = \tfrac{1}{5}(2^{m-2} + \varphi_i),$$

où N est le nombre des répétitions du chiffre i dans la période relative à la colonne 10^m, φ_i étant donné par le Tableau

Valeurs de i.	$m = 4h$.	$m = 4h+1$.	$m = 4h+2$.	$m = 4h+3$.
0 ou 5	1	2	-1	3
1 ou 6	1	-3	4	-2
2 ou 7	1	2	-1	-2
3 ou 8	-4	2	1	3
4 ou 9	1	-3	-1	-2

mais le soin peut sans doute en être laissé au lecteur.

2055.

(1906, p. 575.)

La parabole inscrite dans le quadrilatère formé par les deux axes d'une conique, la tangente et la normale en un point M *de cette conique, touche, comme l'on sait, la normale au centre de courbure en* M. *Trouver le lieu du foyer de cette parabole lorsque le point* M *se déplace sur la conique.* (A. Pellet.)

SOLUTION

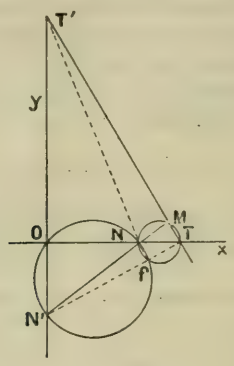
Par M. A. Laureaux.

Soient Ox Oy les axes, MNN′ la normale et TMT′ la tangente.

Le foyer de la parabole est sur les cercles circonscrits aux triangles ONN′, NMT, N′MT′, TO′T′.

Soit f ce point.

Étant sur les quatre cercles, on en déduit de suite qu'il est sur N'T et que les points T', N, f sont sur une même perpendiculaire à N'T.



Il en résulte (quadrilatère complet NOMT'N'T) que

$$(T'NIf) = -1,$$

I étant le point d'intersection de T'N et OM.

Donc ON, OT' sont bissectrices de OM, Of.

Donc Of coupe le cercle NMT au point M' symétrique de M par rapport à Ox et l'on a

$$Of.OM' = ON.OT = c^2,$$

car N et T sont conjugués par rapport aux foyers.

M' décrivant la conique, le lieu de f est la figure inverse par rapport au centre avec la puissance c^2.

Autres solutions par MM. Barisien, Letierce, Lez.

[M²1b]

SUR LES FORMULES DE SALMON ANALOGUES AUX FORMULES DE PLUCKER;

PAR M. G. FONTENÉ.

1. Nous appellerons *singularités essentielles d'une surface* celles qui existent généralement sur la surface ou sur sa polaire réciproque; elles comprennent les singularités tangentielles qui existent lorsqu'on part d'une équation ponctuelle générale (plans bitangents, ...), et les singularités ponctuelles corrélatives de celles-là (courbe nodale, ...). La détermination des relations qui existent entre l'ordre n de la surface, sa classe n', et les nombres relatifs aux singularités en question, est due à Salmon (1847-1850), sauf l'exception suivante. Clebsch a introduit la notion de *genre* pour une surface, en appelant ainsi le nombre de constantes arbitraires contenues (d'une manière homogène) dans l'équation d'une surface d'ordre $n-4$ qui passe par les courbes doubles, courbe nodale et courbe cuspidale, de la surface donnée; Cayley a donné l'expression du genre en fonction du degré n et des nombres relatifs aux singularités ponctuelles, et, en égalant cette expression à sa corrélative, il a obtenu la dernière relation entre les nombres considérés ci-dessus.

La Note actuelle a été rédigée d'après le *Traité de Géométrie analytique à trois dimensions* de Salmon. On y trouvera un exposé méthodique de la question : définitions, formules fondamentales constituant une mise en équation du problème, formules dérivées don-

nant la solution du problème ; je n'ai pas cru devoir reproduire la démonstration des formules fondamentales, mais j'ai insisté sur l'explication *a priori* du terme principal des formules dérivées. J'ai d'ailleurs laissé de côté les singularités non essentielles introduites par Cayley, points coniques, ..., mon but étant de montrer que la connaissance de l'ordre n et des nombres relatifs aux singularités ponctuelles qui sont essentielles entraîne (*en l'absence de singularités accidentelles*) la connaissance de la classe n' et des nombres relatifs aux singularités tangentielles. La notation (II, 77) renverra au *Traité de Salmon*, 2e Partie, page 77.

2. Je rappelle d'abord, avec les notations habituelles de la Géométrie plane, les formules de Plücker :

$$n = m(m-1) - 2\delta - 3\varkappa, \qquad m = n(n-1) - 2\tau - 3i,$$
$$i = 3m(m-2) - 6\delta - 8\varkappa, \qquad \varkappa = 3n(n-2) - 6\tau - 8i.$$

A priori, il y a là seulement trois relations distinctes permettant de calculer n, τ, i, quand on connaît m, δ, $\varkappa$, et inversement; et en effet, l'élimination de δ entre les deux premières, ou celle de τ entre les deux dernières, donne également

$$3n - i = 3m - \varkappa$$

ou

$$i - \varkappa = 3(n - m).$$

Si l'on observe que les deux formules de la première ligne donnent, par soustraction,

$$2(\tau - \delta) + 3(i - \varkappa) = n^2 - m^2,$$

ou

$$2(\tau - \delta) = (n - m)(n + m - 9),$$

on obtient les deux systèmes équivalents

$$\left\{\begin{aligned} n &= m(m-1) - 2\delta - 3\varkappa \\ i &= 3m(m-2) - 6\delta - 8\varkappa \\ 2(\tau - \delta) &= (n-m)(n+m-9) \\ &= [m(m-2) - 2\delta - 3\varkappa][(m^2-9) - 2\delta - 3\varkappa], \end{aligned}\right. \quad [i - \varkappa = 3(n-m)],$$

$$\left\{\begin{aligned} m &= n(n-1) - 2\tau - 3i \\ \varkappa &= 3n(n-2) - 6\tau - 8i \\ 2(\delta - \tau) &= (m-n)(m+n-9) \\ &= [n(n-2) - 2\tau - 3i][(n^2-9) - 2\tau - 3i]. \end{aligned}\right. \quad [\varkappa - i = 3(m-n)],$$

Jacobi a démontré le premier que la *courbe bitangentielle*, courbe passant par les points de contact des tangentes doubles, est d'ordre $(m-2)(m^2-9)$; j'ai fait observer ailleurs (*Revue de Mathématiques spéciales*, août 1898), que la réduction de τ est intuitive si l'on écrit

$$\tau = \tfrac{1}{2} m(m-2)(m^2-9) - 2\delta(n-4) - 3\varkappa(n-3)$$
$$- 2^2 \frac{\delta(\delta-1)}{2} - (2.3)\delta\varkappa - 3^2 \frac{\varkappa(\varkappa-1)}{2}.$$

3. Cayley a déduit de ces formules six formules relatives aux neuf nombres caractéristiques d'une courbe gauche; deux seulement de ces formules nous seront utiles (encore pourrait-on n'en pas faire usage en se bornant à ce qui est essentiel).

Soient :

m, l'ordre d'une courbe gauche;
h, le nombre de cordes qui passent par un point donné;
β, le nombre de points cuspidaux (ou stationnaires);
n, la classe de la courbe, c'est-à-dire le nombre de plans osculateurs passant par un point donné;
h', le nombre de droites d'intersection de deux plans osculateurs qui sont dans un plan donné;

β', le nombre de plans surosculateurs (ou stationnaires);

r, le rang de la courbe, c'est-à-dire le nombre de tangentes qui rencontrent une droite donnée (nombre de plans tangents à la courbe qui passent par la droite);

ces notations sont celles de Salmon, sauf h' et β' qui sont en harmonie avec les notations ultérieures.

Lorsque la courbe est créée par ses plans osculateurs, on préfère ordinairement parler de la développable formée par les tangentes, chacun des deux systèmes de demi-tangentes formant une demi-nappe de la surface : la courbe est l'arête de rebroussement de cette développable, et les plans osculateurs de la courbe sont les plans tangents à la surface; les points situés sur les tangentes à la courbe sont les points de la surface, les plans qui passent par les tangentes (plans tangents à la courbe) sont comparables aux plans tangents à une surface réglée non développable. La notation r désigne à ce point de vue l'ordre de la développable, quantité qui est sa propre corrélative sur une surface réglée; n est le nombre des plans tangents que l'on peut mener par un point à la développable, et ce nombre est encore appelé la classe de la développable. Nous adopterons dans la suite cette façon d'envisager les choses pour une courbe qui se présente par ses plans osculateurs.

Si l'on considère le cône dont le sommet est un point quelconque et qui s'appuie sur la courbe, les formules de Plücker donnent pour la classe de ce cône

$$r = m(m-1) - 2h - 3\beta;$$

de même, si l'on considère une section plane de la développable, on a pour l'ordre de cette courbe

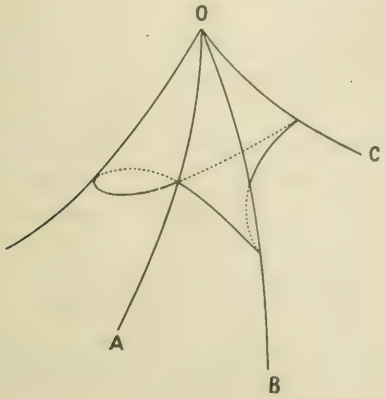
$$r = n(n-1) - 2h' - 3\beta'.$$

4. Voici, pour les surfaces, les éléments considérés par Salmon, avec les notations de l'auteur. On a d'abord les six quantités fondamentales :

n, ordre de la surface ;
b, ordre de la courbe nodale ;
c, ordre de la courbe cuspidale ;
t, nombre de points triples de la surface, points où se croisent trois nappes (ce sont des points triples de la courbe nodale) ;
γ, nombre de points où la courbe cuspidale avec ses deux demi-nappes est coupée par une autre nappe (ce sont des points de rebroussement de la courbe nodale) ;
β, nombre de points de rebroussement de la courbe cuspidale, séparant la branche de courbe nodale qui y passe en deux régions, l'une crunodale, l'autre acnodale [1] ;

---

[1] Si BOC est la courbe cuspidale avec rebroussement en O, si OA est la région crunodale de la courbe nodale, la forme de la surface dans le voisinage du point O est celle qu'indique la figure suivante :



et les six quantités corrélatives (en adoptant le point de vue indiqué au n° 3) :

n', classe de la surface;

b', classe de la développable qui est l'enveloppe des plans bitangents, ou nombre de plans bitangents que l'on peut mener par un point;

c', classe de la développable qui est l'enveloppe des plans stationnaires ou plans tangents aux points paraboliques, ou nombre de ces plans qui passent par un point donné [1];

t', nombre de plans tritangents;

γ', nombre de plans qui sont à la fois tangents en un point parabolique et en un autre point;

β', nombre de plans surosculateurs de la courbe à laquelle les plans tangents aux points paraboliques sont osculateurs.

5. Nous aurons à considérer les plans tangents le long de la courbe nodale, les plans tangents le long de la courbe cuspidale, et, corrélativement, les points de contact des plans bitangents, les points de contact des plans stationnaires ou points paraboliques. Je rappelle que les points paraboliques sont à l'intersection de la surface donnée U avec la hessienne H, et que les points de contact des plans bitangents sont à l'intersection de la surface U avec une surface K dont nous reparlerons; nous dirons : la courbe (U, H), la courbe (U, K). Voici les notations relatives à ces éléments :

ρ, classe de la développable qui est l'enveloppe des plans tangents le long de la courbe nodale, ou

---

[1] Le plan tangent en un point parabolique est stationnaire en prenant le point consécutif sur la tangente inflexionnelle.

nombre de ces plans qui passent par un point donné ;

σ, classe de la développable qui est l'enveloppe des plans tangents le long de la courbe cuspidale, ou nombre de ces plans qui passent par un point donné ;

ρ', ordre de la courbe qui est le lieu des points de contact des plans bitangents, courbe (U, K) ;

σ', ordre de la courbe qui est le lieu des points paraboliques, courbe (U, H).

On remarquera que ρ est le nombre des points d'intersection de la courbe nodale avec la courbe de contact des plans tangents menés par un point, ...

6. Les notations suivantes sont relatives aux tangentes, et non plus aux points ou aux plans tangents :

a, nombre de tangentes que l'on peut mener à la surface par un point donné, dans un plan donné ;

δ, nombre de tangentes doubles issues d'un point ;

$\varkappa$, nombre de tangentes inflexionnelles issues d'un point ;

δ', nombre de tangentes doubles dans un plan ;

$\varkappa'$, nombre de tangentes inflexionnelles dans un plan.

On remarquera que a est à la fois l'ordre du cône circonscrit et la classe de la section plane ; le cône circonscrit a δ arêtes doubles et $\varkappa$ arêtes cuspidales, la section plane a δ' tangentes doubles et $\varkappa'$ tangentes d'inflexion. La courbe de contact des plans tangents issus d'un point est d'ordre a, et, corrélativement, la développable circonscrite à la surface le long d'une section plane est de classe a.

7. A la courbe nodale et à la courbe cuspidale se rattachent quatre quantités dont la considération n'est pas indispensable :

k, nombre de cordes de la courbe nodale qui passent par un point donné;
h, nombre de cordes de la courbe cuspidale qui passent par un point donné;
q, rang de la courbe nodale;
r, rang de la courbe cuspidale,

avec les formules

$$q = b(b-1) - 2k - 6t - 3\gamma,$$
$$r = c(c-1) - 2h - 3\beta,$$

dont la première s'obtient en mettant $k + 3t$ au lieu de k dans la formule de Cayley rappelée au n° 3; on a de même quatre quantités corrélatives :

k', nombre de droites d'intersection de deux plans bitangents qui sont dans un plan donné;
h', nombre de droites d'intersection de deux plans stationnaires qui sont dans un plan donné;
q', ordre de la développable qui est l'enveloppe des plans bitangents;
r', ordre de la développable qui est l'enveloppe des plans stationnaires ou plans tangents aux points paraboliques (les génératrices de cette développable sont les tangentes inflexionnelles de la surface aux points paraboliques),

avec les formules

$$q' = b'(b'-1) - 2k' - 6t' - 3\gamma',$$
$$r' = c'(c'-1) - 2h' - 3\beta'.$$

On remarquera les deux ensembles de notations :

Courbe nodale ..... b, ρ, k, q.
Courbe cuspidale..... c, σ, h, r.

8. Problème. — *Étant données les six quantités*

$$n,\quad b,\quad c,\quad t,\quad \gamma,\quad \beta,$$

calculer les six quantités

$$n',\quad b',\quad c',\quad t',\quad \gamma',\quad \beta'.$$

Les quantités considérées dans ce qui précède étant au nombre de

$$12 + 8 + 4 + 5 = 29,$$

il suffira d'en donner 6 pour calculer toutes les autres, et en particulier les corrélatives des 6 premières, si ces 29 quantités sont liées par 23 relations distinctes. On a déjà écrit au n° 5 les formules qui donnent les expressions des quatre quantités q, r, q', r' en fonction des quantités b, c, ...: il faut donc encore 19 relations, soit $18 + 1$, en mettant à part celle de Cayley. Les 18 relations de Salmon forment 3 groupes de 6 relations, chaque groupe comprenant 3 relations ponctuelles et 3 relations tangentielles.

9. En premier lieu, *les formules de Plücker donnent 6 relations distinctes entre les valeurs des quantités n, b, c, δ, $\varkappa$ et a, n', b', c', δ', $\varkappa'$.* On a d'une part, en considérant une section plane de la surface, trois relations que nous utiliserons sous la forme qui suppose connus les éléments ponctuels :

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{aligned} a &= n(n-1) - 2b - 3c \\ \varkappa' &= 3n(n-2) - 6b - 8c \\ \delta' &= \tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9) - 2b(a-4) - 3c(a-3) - \ldots \end{aligned}\right. \qquad [c - \varkappa' = 3(n-a)],$$

On a d'autre part, en considérant un cône circonscrit à la surface, trois relations dont la forme corrélative des précédentes serait celle qui exprimerait a, $\varkappa$, δ en fonction de n', b', c', mais que nous utiliserons sous la forme qui suppose connus les éléments ponctuels :

$$(\mathrm{I}')\quad \begin{cases} n' = a(a-1) - 2\delta - 3\varkappa \\ c' = 3a(a-2) - 6\delta - 8\varkappa \\ 2(b'-\delta) = (n'-a)(n'+a-9) \\ \qquad\qquad = [a(a-2) - 2\delta - 3\varkappa][(a^2-9) - 2\delta - 3\varkappa]. \end{cases} \qquad [c' - \varkappa = 3(n'-a)],$$

Je signale en passant la formule

$$3n - c - \varkappa = 3n' - c' - \varkappa',$$

chacun des deux membres étant égal à $3a - \varkappa - \varkappa'$.

10. En second lieu, *la considération de la seconde polaire d'un point quelconque (courbe d'ordre $n-2$) donne les formules suivantes, dues à Salmon* (III, 169) :

$$(\mathrm{A})\quad \begin{cases} \varkappa = a(n-2) - (\rho + 2\sigma), \\ \rho = b(n-2) - (3t + 3\gamma + 2\beta), \\ 2\sigma = c(n-2) - (\gamma + 4\beta); \end{cases}$$

pour la première, par exemple, qui donne le nombre des tangentes inflexionnelles issues d'un point P, il faut défalquer du nombre des points d'intersection de la courbe de contact des tangentes issues de ce point avec la seconde polaire de ce point, soit $a(n-2)$, le nombre des points de rencontre B de cette courbe de contact avec la courbe nodale, soit ρ, et (deux fois) le nombre des points de rencontre C de cette courbe de contact avec la courbe cuspidale, soit σ; la seconde polaire du point considéré contient en effet les points B, puisqu'une droite PB rencontre la surface en trois points qui

coïncident en B, ... La seconde et la troisième formule sont relatives à ces points B et C.

On a les formules corrélatives

$$(A') \quad \begin{cases} \alpha' = a(n'-2) - (\rho' - 2\sigma'), \\ \rho' = b'(n'-2) - (3t' - 3\gamma' - 2\beta'), \\ 2\sigma' = c'(n'-2) - (\gamma' + 4\beta'). \end{cases}$$

11. En troisième lieu, *la considération d'une surface d'ordre* $(n-2)(n-3)$ *passant par les points de contact des tangentes doubles issues d'un point donne les formules suivantes, également dues à Salmon* (III, 175) :

$$\begin{aligned} 2\delta &= a(n-2)(n-3) - 2(ab - 2\rho) - 3(ac - 3\sigma), \\ 4k &= b(n-2)(n-3) - (ab - 2\rho) - 3(bc - 2\gamma - 3\beta), \\ 6h &= c(n-2)(n-3) - (ac - 3\sigma) - 2(bc - 2\gamma - 3\beta); \end{aligned}$$

la différence $ab - 2\rho$ représente le nombre des intersections apparentes de la courbe de contact des tangentes issues d'un point et de la courbe nodale, ...

On peut écrire :

$$(B) \quad \begin{cases} 2\delta = a[(n-2)(n-3) - 2b - 3c] - 4\rho - 9\sigma, \\ 4k = b[(n-2)(n-3) - a - 3c] + 2\rho \qquad - 6\gamma - 9\beta, \\ 6h = c[(n-2)(n-3) - a - 2b] + 3\sigma \qquad - 4\gamma - 6\beta. \end{cases}$$

On a de même

$$(B') \quad \begin{cases} 2\delta' = a[(n'-2)(n'-3) - 2b' - 3c'] - 4\rho' - 9\sigma', \\ 4k' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 6h' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

12. Salmon transforme les formules (B) en ajoutant à chacune d'elles la formule correspondante (A) multipliée par 4; le coefficient de a, b, ou c au second membre de la nouvelle formule commence alors par le

terme $(n-2)(n+1)$, ou $n(n-1)-2$, et ce coefficient prend une forme très simple en tenant compte de la relation

$$a+2b+3c=n(n-1):$$

on a ainsi

$$(\mathrm{B}_1)\quad \begin{cases} 2\delta+4\varkappa=a^2-2a+\sigma, \\ 4k \qquad\quad =2b^2-2b-2\varrho-12t-6\gamma+\beta, \\ 6h \qquad\quad =3c^2-2c-5\sigma \qquad\qquad -10\beta; \end{cases}$$

on a de même

$$(\mathrm{B}'_1)\quad \begin{cases} 2\delta'+4\varkappa'=a^2-2a+\sigma', \\ 4k' \qquad\quad =\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 6h' \qquad\quad =\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

En combinant les relations (B_1) avec les relations

$$\begin{aligned} n' &= a^2-a-2\delta-3\varkappa, \\ 2q &= 2b^2-2b-4k \qquad -12t-6\gamma, \\ 3r &= 3c^2-3c-6h \qquad\qquad -9\beta, \end{aligned}$$

on obtient de nouvelles relations qui peuvent remplacer les unes ou les autres :

$$(\mathrm{F})\quad \begin{cases} n'-a=\varkappa-\sigma, \\ 2q=2\varrho-\beta, \\ 3r+c=5\sigma+\beta; \end{cases}$$

on a de même

$$(\mathrm{F}')\quad \begin{cases} n-a=\varkappa'-\sigma', \\ 2q'=2\varrho'-\beta', \\ 3r'-c'=5\sigma'-\beta'; \end{cases}$$

on peut remarquer la formule

$$n+\varkappa-\sigma=n'+\varkappa'-\sigma',$$

chacun des deux membres étant égal à $n+n'-a$.

Les six formules (F) et (F′) remplaceront pour nous

les quatre formules du n° 7, la première formule (I′) et la première formule (B'_1). Ce qui reste à dire sur ces formules sera mieux à sa place un peu plus loin.

13. Voici enfin la formule de Cayley (III, 191, 192, 138) :

$$(G) \qquad 26n - 12c + \beta = 26n' - 12c' + \beta'.$$

14. Revenons au problème du n° 8, pour lequel on suppose donnés n, b, c, t, γ, β.

Observons d'abord que les huit quantités k, h, q, r, k', ... figurent seulement dans huit relations, que l'on peut mettre à part et qui feront connaître ces huit quantités quand on aura déterminé les autres : ces huit relations sont les deux dernières relations de chacun des groupes (B_1) et (B'_1), et les deux dernières relations de chacun des groupes (F) et (F′).

De cette façon, on a seulement six inconnues principales

$$n', \quad b', \quad c', \quad t', \quad \gamma', \quad \beta',$$

et neuf inconnues auxiliaires

$$a \begin{cases} \rho, & \sigma, & \varkappa, & \delta, \\ \rho', & \sigma', & \varkappa', & \delta', \end{cases}$$

liées par quinze relations qui sont :

les six relations (I) et (I′),
les six relations (A) et (A′),
la première relation de chacun des groupes (B_1) et (B'_1),
la relation de Cayley;

toutefois, comme il a été dit, nous remplacerons la première des relations (I′) par la première formule (F),

et la première des relations (B'_1) par la première formule (F').

15. Les relations (I) donnent a, $\varkappa'$, δ' :

$$(1) \qquad a = n(n-1) - 2b - 3c,$$

$$(2) \qquad \varkappa' = 3n(n-2) - 6b - 8c,$$

$$(3) \quad \delta' = \tfrac{1}{2} n(n-2)(n^2-9) - 2b(a-4) - 3c(a-3) - \ldots.$$

Les relations (A) donnent ρ, σ, k :

$$(4) \qquad \rho = b(n-2) - (3t + 3\gamma + 2\beta),$$

$$(5) \qquad 2\sigma = c(n-2) - \qquad (\gamma - 4\beta),$$

$$(6) \qquad \varkappa = a(n-2) - (\rho + 2\sigma) = \ldots.$$

La première relation (B) donne δ :

$$(7) \quad 2\delta = a[(n-2)(n-3) - 2b - 3c] + 4\rho + 9\sigma = \ldots.$$

16. Les relations (I') donnent n', c', b'. Pour le calcul de n', il vaut mieux employer la première des formules (F); on a ainsi

$$n' - a = \varkappa - \sigma = a(n-2) - (\rho + 3\sigma),$$

ou

$$(8) \qquad n' = a(n-1) - (\rho + 3\sigma) = \ldots.$$

Cette formule importante pourrait être établie directement, comme le remarque Salmon : en effet, pour avoir les points de contact des plans tangents à une surface menée par une droite, on peut couper la courbe de contact relative à un premier point de la droite par la première polaire d'un autre point de cette droite, sauf à écarter les points en nombre ρ où la courbe de contact est rencontrée par la courbe nodale, et (trois fois) les points en nombre σ où elle est rencontrée par la courbe cuspidale, puisqu'une première polaire quelconque passe par ces deux courbes.

La valeur de c' est donnée par la formule

$$c' - \varkappa = 3(n' - a);$$

à cause de

$$\varkappa = a(n-2) - (\rho - 2\sigma),$$
$$n' - a = a(n-2) - (\rho + 3\sigma),$$

on a donc

$$(9) \qquad c' = a \times \overline{4(n-2)} - (4\rho + 11\sigma) = \ldots;$$

on aurait pu écrire

$$c' = \varkappa + 3(n' - a) = 4\varkappa - 3\sigma = \ldots;$$

le premier terme de la formule (9) *s'explique par le fait que les points paraboliques sont sur la hessienne* H *qui est d'ordre* $4(n-2)$.

On obtient b' par la dernière des formules (I'). On a d'abord

$$2\delta + 3\varkappa = a[n(n-2) - 2b - 3c] + \rho + 3\sigma;$$

on a donc

$$2b' = 2\delta - \left[a(a - 2 - n(n-2) + 2b + 3c) - \rho - 3\sigma\right]$$
$$\times \left[a(a - n(n-2) + 2b + 3c) - 9 - \rho - 3\sigma\right],$$

ou, à cause de

$$a - 2b + 3c = n(n-1),$$
$$2b' = a[(n-2)(n-3) - 2b - 3c] + 4\rho - 9\sigma$$
$$+ [a(n-2) - \rho - 3\sigma][an - 9 - \rho - 3\sigma],$$

ou enfin

$$(10) \qquad 2b' = a \times \overline{(n-2)(n^3 - n^2 + n - 12)} - \ldots;$$

le premier terme de cette formule s'explique par le fait que les points de contact des plans bitangents sont sur une surface K *d'ordre*

$$(n-2)(n^3 - n^2 + n - 12).$$

17. La première formule (F′), substituée à la première formule (B'_1), donne σ'. En la rapprochant de celle qui donne $\varkappa'$, on a

$$n - a = \varkappa' - \sigma',$$
$$3(n - a) = c - \varkappa',$$

et, par suite,

$$4(n - a) = c - \sigma',$$

ce qui donne

$$(11) \qquad \sigma' = n \times \overline{4(n-2)} - 8b - 11c;$$

le premier terme s'explique par le fait que la hessienne H *contient les points paraboliques.*

La première des relations (A′) donne ρ'; dans le terme qui subsiste seul en l'absence de singularités ponctuelles, $(n - 2)$ se met en facteur à cause de

$$(n' - 2) = (n - 2)(n^2 + 1) + \ldots,$$

et l'on a

$$(12) \qquad \rho' = n \times \overline{(n-2)(n^3 - n^2 + n - 12)} + \ldots;$$

le premier terme s'explique par le fait que les points de contact des plans bitangents appartiennent à la surface K *dont il est question ci-dessus.*

18. La relation de Cayley donne

$$(13) \qquad 2\beta' = n \times \overline{4(n-2)} \times (11n - 24) - \ldots.$$

Voici comment Salmon rend compte du premier terme de cette expression (III, 167). En un point quelconque, la section de la surface donnée U par le plan tangent offre un point double dont les deux tangentes sont les tangentes inflexionnelles en ce point; il peut arriver que l'une de ces tangentes soit une tangente d'inflexion pour la section, et le lieu des points

pour lesquels il en est ainsi, la courbe *flecnodale*, est l'intersection de la surface par une surface S de degré $11n - 24$; on arrive à ce résultat en cherchant les droites qui rencontrent la surface en quatre points consécutifs (III, 140).

En un point d'intersection de la courbe (U, H) qui est le lieu des points paraboliques avec la surface S ou avec la courbe flecnodale, la direction de la tangente à la courbe (U, H) est la même que celle de la tangente inflexionnelle, et les plans tangents en deux points consécutifs de la courbe (U, H) sont, par suite, les mêmes.

Il semble donc que l'on doit avoir

$$\beta' = n \times \overline{4(n-2)} \times (11n - 24) - \ldots;$$

mais la surface S est tangente à la hessienne, de sorte que la courbe (U, H) est tangente à la surface S, et l'on a réellement

$$\beta' = \tfrac{1}{2} n \times \overline{4(n-2)} \times (11n - 24) - \ldots.$$

Voir encore Salmon, III, 160.

19. Les deux dernières relations (A') donnent enfin

$$(14) \qquad \gamma' = n \times \overline{4(n-2)} \times \overline{(n-3)(n^3 - 3n - 16)} - \ldots,$$

$$(15) \qquad 6t' = n(n-2)(n^7 - \ldots) - \ldots.$$

Le premier terme de la relation (14) appellerait une explication analogue à celle qui concerne β', au moyen d'une surface dont le degré serait

$$(n-3)(n^3 - 3n - 16).$$

Les formules (13) et (15) donnent

$$\gamma' - 2\beta' = n \times \overline{4(n-2)} \times \overline{(n-2)(n^3 - n^2 + n - 1)} - \ldots$$

Salmon rend compte du premier terme de cette formule (III, 173), *en considérant les points communs aux trois surfaces* U, H, K, ou encore les points communs à la courbe parabolique (U, H) et à la courbe (U, K) qui est le lieu des points de contact des plans bitangents.

20. Au moyen des formules

$$\rho = b(n-2) - 3t - 3\gamma - 2\beta,$$

$$\sigma = \frac{cn-\gamma}{2} - c - 2\beta,$$

on a

$$k = \frac{b(b-1)}{2} - \frac{bn + 3t - 5\frac{\beta}{2}}{2},$$

$$h = \frac{c(c-1)}{2} - 5\frac{cn-\gamma}{12},$$

$$q = \rho - \frac{\beta}{2} = \ldots,$$

$$r = \frac{5\sigma - \beta - c}{3} = 5\frac{cn-\gamma}{6} - 2c - 3\beta.$$

On a encore

$$q' = n(n-2)(n-3)(n^2+2n-4) - \ldots,$$

$$2r' = n \times \overline{4(n-2)} \times (3n-4) - \ldots;$$

le premier terme de cette dernière expression peut être obtenu directement (III, 123).

21. Les valeurs obtenues pour les nombres caractéristiques doivent être entières, et il en résulte certaines conditions pour les données.

La formule (5) montre que $cn - \gamma$ doit être pair; la formule (7) exige qu'il soit multiple de 4.

La condition pour que t' soit entier est réalisée

d'elle-même; on doit écrire que la quantité

$$b'(n'+1) - \beta' + \beta'$$

est divisible par 3 : en tenant compte de ce que n^3 est congru à n relativement au module 3, on arrive à l'expression $(b^3 - b) - (\beta^3 - \beta)$, qui doit être et qui est divisible par 3.

D'après (F) et (F'), q et q' sont entiers si β et β' sont pairs, c'est-à-dire, en tenant compte de la formule de Cayley, si β est pair. La condition pour que r et r' soient entiers est que $cn - \gamma$ soit multiple de 3; d'après ce qu'on a déjà vu, il doit donc être multiple de 12.

D'après les formules du n° 7, h et h' sont entiers si r et r' sont pairs, ce qui a lieu en vertu des conditions déjà obtenues. Cette parité se ramène, en effet, à celle des différences $\sigma - c$, $\sigma' - c'$, parités qui se ramènent l'une à l'autre, et la formule

$$2\sigma - 2c = c(n-4) - (\gamma - 4\beta)$$

montre que $2\sigma - 2c$ est multiple de 4 en même temps que $cn - \gamma$.

La valeur de k est un nombre entier si la différence $q - \gamma$ est paire, ce qui exige que $bn - t - \frac{\beta}{2}$ soit un nombre pair. Cette même condition donne d'ailleurs k' entier, comme on s'en assure en considérant la différence $k' - k$.

On a donc ainsi les conditions

$$cn - \gamma = \text{mult. de } 12,$$
$$\beta = \text{mult. de } 2,$$
$$bn - t - \frac{\beta}{2} = \text{mult. de } 2.$$

22. L'expression du genre donnée par Cayley est (III, 138)

$$D = \tfrac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) - (n-3)(b+c) + \tfrac{1}{2}(q+r) + 2t + \tfrac{5}{2}\gamma + \tfrac{7}{2}\beta;$$

on peut écrire

$$12D = 2(n-1)(n-2)(n-3) - 6(b+c)(n-4) - cn - 6t - 7\gamma + 9\beta.$$

On lit dans l'Ouvrage de Salmon (III, 191) : « La formule (13), due à Cayley, est la forme correcte de l'expression de β', déduite d'abord par lui (avec quelques erreurs dans les coefficients numériques) de considérations différentes, mais qui résulte plus facilement de la relation obtenue en égalant l'expression ponctuelle du genre à son expression tangentielle; et la formule

$$26n - 12c + \beta = 26n' - 12c' + \beta'$$

est une relation qui se présente d'elle-même dans cette recherche. »

Il n'y a pas à se préoccuper ici du fait que le *genre numérique* d'une surface, c'est-à-dire le nombre que donne la formule de Cayley, peut être inférieur à son *genre géométrique*, Zeuthen ayant montré que le genre numérique est, comme le genre géométrique, un invariant pour toute transformation birationnelle. Je renverrai sur ce point à la *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, de MM. E. Picard et G. Simart.

Note. — Je retrouve au dernier moment, dans le Volume des *Nouvelles Annales* pour 1864, un article intéressant de E. de Jonquières relatif aux singularités

tangentielles des surfaces algébriques qui n'ont pas de singularités ponctuelles. Je regrette de n'avoir pu en tirer parti.

[O5m]

SUR UN RÉSEAU PARTICULIER DE COURBES COORDONNÉES;

PAR M. HAAG,
Professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée de Douai.

Soient deux surfaces s et s_1 entre lesquelles on établit une correspondance quelconque. Je dis qu'il existe deux réseaux de courbes sur chaque surface qui ont même longueur que les courbes correspondantes. En effet, si l'on prend des courbes coordonnées se correspondant sur les deux surfaces, en égalant les éléments linéaires de s et de s_1, on obtient

$$(E - E_1)\,du^2 + 2(F - F_1)\,du\,dv + (G - G_1)\,dv^2 = 0,$$

équation qui définit bien sur chaque surface deux réseaux de courbes répondant à la question.

Nous écarterons le cas où la correspondance établie serait conforme, auquel cas on obtiendrait les lignes de longueur nulle, et aussi celui où les deux surfaces seraient applicables, cas où toutes les courbes des deux surfaces répondraient à la question.

Ceci étant, on peut se proposer d'étudier la correspondance entre les deux surfaces, en rapportant celles-ci aux réseaux de lignes qu'on vient de mettre en évidence. Nous ne ferons cette étude que pour la représentation sphérique d'une surface quelconque (s) *non minima et non applicable sur la sphère de*

rayon 1, pour échapper aux deux cas particuliers écartés tout à l'heure.

Nous allons employer la méthode du trièdre mobile et nous nous reporterons pour cela aux formules de M. Codazzi, données dans le Tome II de la *Théorie des surfaces* de M. Darboux (p. 384), formules que nous rappelons ici :

$$ds^2 = A^2\,du^2 + C^2\,dv^2 + 2\,AC\cos\alpha\,du\,dv,$$

$$\xi = A\cos m, \qquad \eta = A\sin m, \qquad \xi_1 = C\cos n, \qquad \eta_1 = C\sin n,$$

$$n - m = \alpha;$$

$$(A)\quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial p}{\partial v} - \dfrac{\partial p_1}{\partial u} = qr_1 - rq_1, & r = -\dfrac{\partial n}{\partial u} - \dfrac{1}{C\sin\alpha}\left(\dfrac{\partial A}{\partial v} - \dfrac{\partial C}{\partial u}\cos\alpha\right), \\ \dfrac{\partial q}{\partial v} - \dfrac{\partial q_1}{\partial u} = rp_1 - pr_1, & r_1 = -\dfrac{\partial m}{\partial v} + \dfrac{1}{A\sin\alpha}\left(\dfrac{\partial C}{\partial u} - \dfrac{\partial A}{\partial v}\cos\alpha\right), \\ \dfrac{\partial r}{\partial v} - \dfrac{\partial r_1}{\partial u} = pq_1 - qp_1, & A(p_1\sin m - q_1\cos m) \\ & \quad = C(p\sin n - q\cos n). \end{array}\right.$$

$$d\sigma^2 = (p^2 + q^2)\,du^2 + (p_1^2 + q_1^2)\,dv^2 + 2(pp_1 + qq_1)\,du\,dv.$$

L'angle m désigne l'angle de Ox du trièdre mobile avec la tangente à $v =$ const. dans le sens des u croissants. De même, n est l'angle de Ox avec la tangente à $u =$ const. dans le sens des v croissants ; par suite $\alpha = n - m$ est l'angle des courbes coordonnées.

Ceci étant, pour que les courbes coordonnées aient même longueur que leur image sphérique, il faut et suffit que l'on ait

$$p^2 + q^2 = A^2, \qquad p_1^2 + q_1^2 = C^2,$$

équations auxquelles nous satisferont de la manière la plus générale en posant

$$p = A\cos\mu, \qquad q = A\sin\mu$$

et

$$p_1 = C\cos\nu, \qquad q_1 = C\cos\nu.$$

Portant ces valeurs dans la sixième formule (A), il

vient

$$\sin(m - \nu) = \sin(n - \mu);$$

d'où

$$m - \nu = n - \mu \qquad \text{ou} \qquad m - \nu = \pi - (n - \mu).$$

En admettant la première hypothèse et la combinant avec les cinq autres équations (A), on arrive, après un calcul assez long, à la condition suivante :

$$AC \sin\alpha = 0,$$

qui donnerait un élément linéaire carré parfait et, par suite, une développable circonscrite au cercle de l'infini. Nous écartons cette solution peu intéressante et prenons la deuxième hypothèse, que nous écrivons :

$$\nu - m = n - \mu + \pi = \varphi;$$

d'où

$$\nu = m + \varphi, \qquad \mu = \pi + n - \varphi.$$

Les deux premières équations (A) deviennent alors

$$A \cos\mu \frac{\partial(\alpha - \varphi)}{\partial v} + C \cos\nu \frac{\partial(\alpha - \varphi)}{\partial u}$$
$$= \frac{2}{\sin\alpha}\left[-\frac{\partial A}{\partial v}\cos n \cos(\alpha - \varphi) + \frac{\partial C}{\partial u}\cos m \cos(\alpha - \varphi)\right],$$

$$A \sin\mu \frac{\partial(\alpha - \varphi)}{\partial v} + C \sin\nu \frac{\partial(\alpha - \varphi)}{\partial u}$$
$$= \frac{2}{\sin\alpha}\left[-\frac{\partial A}{\partial v}\sin n \cos(\alpha - \varphi) + \frac{\partial C}{\partial u}\sin m \cos(\alpha - \varphi)\right],$$

qui peuvent s'écrire, en posant $\alpha - \varphi = \theta$,

$$(1)\quad \begin{cases} A \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\sin(2\theta - \alpha) = \dfrac{2\cos\theta}{\sin\alpha}\left[\dfrac{\partial A}{\partial v}\sin\theta + \dfrac{\partial C}{\partial u}\sin(\alpha - \theta)\right], \\[2ex] C \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\sin(2\theta - \alpha) = \dfrac{2\cos\theta}{\sin\alpha}\left[\dfrac{\partial A}{\partial v}\sin(\alpha - \theta) + \dfrac{\partial C}{\partial u}\sin\theta\right]. \end{cases}$$

Enfin, la troisième relation (A) devient

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
AC\sin(2\theta-\alpha) = &-\frac{\partial^2\alpha}{\partial u\,\partial v}\\
&+\frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial v}\left[\frac{\cos\alpha}{C}\frac{\partial A}{\partial v}-\frac{\partial\log C}{\partial u}\right]\\
&+\frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial u}\left[\frac{\cos\alpha}{A}\frac{\partial C}{\partial u}-\frac{\partial\log A}{\partial v}\right]\\
&-\frac{1}{\sin\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{C}\frac{\partial A}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial u}\right)\right]\\
&+\cot\alpha\,\frac{\partial^2\log AC}{\partial u\,\partial v}.
\end{aligned}
\right.
$$

On peut imaginer qu'on tire θ de cette dernière équation et qu'on porte dans les deux précédentes. On obtiendrait ainsi deux équations aux dérivées partielles du troisième ordre par rapport à A, C et α, ce qui montre que, de ces trois fonctions, une seulement peut être choisie arbitrairement. Les deux autres seraient données par des équations fort compliquées que nous ne formerons que pour des cas particuliers.

Supposons donc que nous ayons obtenu un système de valeurs pour A, C, α et φ satisfaisant aux trois équations précédentes et voyons ce que deviennent les équations remarquables relatives à la surface, données par le Tableau de formules déjà signalé.

Lignes asymptotiques. — Leur équation s'écrit

$$\sin(\varphi-\alpha)(A^2du^2+C^2dv^2)+2AC\sin\varphi\,du\,dv=0.$$

On voit que les lignes coordonnées seront asymptotiques pour

$$\alpha-\varphi=k\pi \qquad \text{ou} \qquad \theta=k\pi,$$

et dans ce cas seulement.

Les équations (1) nous donnent alors

$$\frac{\partial C}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial A}{\partial v} = 0,$$

ce qui permet de supposer $A = C = 1$, en faisant un changement de variables qui conserve les mêmes courbes coordonnées.

L'équation (2) devient alors

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u\, \partial v} = \sin \alpha. \tag{3}$$

Si l'on remarque que u et v sont alors les longueurs des courbes coordonnées, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si les lignes asymptotiques d'une surface ont même longueur que leurs images sphériques, l'angle α de ces lignes, considéré comme fonction de leurs longueurs u et v, satisfait à l'équation* (3).

La réciproque de ce théorème s'énonce aisément.

A toute solution de l'équation (3) on pourra faire correspondre une surface (s) et une seule. En effet, si l'on se rappelle que l'angle m, par exemple, peut être choisi arbitrairement, on voit de suite que les translations et les rotations relatives au trièdre mobile seront déterminées dès que le sera α, et par suite on obtiendra une seule surface, à sa position dans l'espace près.

La détermination de cette surface dépendra, comme on sait, des deux équations de Riccatti suivantes :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -ir x + \frac{q - ip}{2} + \frac{q + ip}{2} x^2,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -ir_1 x + \frac{q_1 - ip_1}{2} + \frac{q_1 + ip_1}{2} x^2,$$

qui deviennent, en supposant par exemple $m = \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = i\frac{\partial \alpha}{\partial u}x - \frac{1}{2}(1 + x^2),$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}x^2).$$

Ces deux équations intégrées, on sera ramené à des quadratures.

Lignes de courbure. — Leur équation se réduit à

$$A\,du \pm C\,dv = 0,$$

d'où :

Théorème. — *Sur une surface quelconque, les lignes qui ont même longueur que leur représentation sphérique sont également inclinées sur les lignes de courbure.*

Dans le cas particulier précédent, les lignes de courbure s'intègrent par quadratures et, dans l'hypothèse $A = C = 1$, leur équation est

$$u \pm v = \text{const.}$$

Rayons de courbure principaux. — Ils sont donnés par l'équation

$$\rho^2 \sin(\alpha - 2\varphi) - 2\rho\cos\varphi + \sin\alpha = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{RR'} = \frac{\sin(\alpha - 2\varphi)}{\sin\alpha}, \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = \frac{\cos\varphi}{\sin\alpha}.$$

On voit de suite que, dans le cas particulier examiné précédemment, on a

$$\frac{1}{RR'} = -1;$$

donc :

Théorème. — *Toute surface dont les lignes asymptotiques ont même longueur que leurs images sphériques est une surface à courbure totale constante égale à* -1.

Réciproquement, si $\frac{1}{RR'} = -1$, on a

$$\alpha - 2\varphi = -\alpha + 2k\pi$$

ou

$$\alpha - 2\varphi = \pi + \alpha + 2k\pi.$$

La deuxième hypothèse ne convient pas, car elle donnerait $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = 0$.

La première nous donne $\alpha - \varphi = k\pi$, et nous retombons sur notre cas particulier. La réciproque du théorème précédent est donc vraie, comme cela résulte d'ailleurs de la formule d'Enneper relative à la torsion des lignes asymptotiques.

En outre, si l'on se reporte à ce qui a été dit plus haut, on voit comment *la détermination des surfaces à courbure totale constante négative se ramène à l'intégration de l'équation* (3) et à celle de deux équations de Riccatti.

Nous avons, de plus, une interprétation géométrique simple de cette équation (3).

On peut se proposer aussi de chercher si l'on peut avoir une courbure totale égale à $+1$, ce qui donnerait des surfaces applicables sur la sphère de rayon 1. Or, en écrivant que l'on a $\frac{1}{RR'} = +1$, on trouve immédiatement : soit

$$\varphi = k\pi \qquad \text{(solution à rejeter)},$$

soit

$$\alpha - \varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

auquel cas on a

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \pm 2$$

et, par suite,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R'} = \pm 1.$$

On retrouve donc une sphère de rayon 1. D'où :

Théorème. — *On ne peut pas déformer une sphère de façon que le plan tangent en chaque point reste parallèle à lui-même.*

On peut se proposer, enfin, de chercher les surfaces à courbure moyenne ± 1. On retrouve d'abord la sphère de rayon 1 ; puis on trouve $\varphi + \alpha = \pm \frac{\pi}{2}$. En portant cette valeur dans les équations (1) et (2), on aurait trois équations pour déterminer A, C et α. Mais elles ne sont pas simples et nous nous arrêterons là.

[M²9e]

SUR UNE SURFACE DU NEUVIÈME ORDRE ;

Par M. Lucien GODEAUX.

Dans cette Note, nous étudions une surface du neuvième ordre possédant deux droites multiples d'ordre *quatre* et sa représentation sur un plan.

1. Soient a_1, a_2 deux droites quelconques et R un réseau de surfaces cubiques ayant en commun 17 points $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{17}$.

La surface cubique du réseau R passant par les points P_1, P_2 pris respectivement sur les droites a_1, a_2 est encore rencontrée par la droite $P_1 P_2$ en un point P_3. Nous allons rechercher le lieu du point P_3 au moyen du principe de Chasles.

Soient (X_1), (X_2) deux ponctuelles de même support d.

Par le point X_1 menons la droite g s'appuyant sur a_1 et a_2. Les points (g, a_1) et (g, a_2) déterminent une surface du réseau R. Celle-ci marque sur la ponctuelle (X_2) trois points X_2.

Par un point X_2 passent une infinité simple de surfaces cubiques appartenant à R. Les droites qui joignent les points de rencontre de ces surfaces avec les droites a_1, a_2 engendrent une réglée. Cette réglée rencontre la ponctuelle (X_1) en six points X_1.

En effet, soient (Y_1), (Y_2) deux ponctuelles ayant comme support commun la droite a_1. Par un point Y_1 passe une surface cubique passant par le point X_2 choisi plus haut. Par les points d'intersection de cette surface avec a_2 menons les droites s'appuyant sur d et a_1. On détermine ainsi trois points Y_2. Inversement, par un point Y_2 menons une droite s'appuyant sur a_2 et d, et par le point de rencontre de cette droite avec a_2 une surface cubique passant par X_2. Celle-ci marque sur a_1 trois points Y_1. Les points Y_1 et Y_2 étant liés par une correspondance $(3,3)$ présentent six coïncidences.

Les points X_1 et X_2 sont donc liés par une correspondance $(6,3)$. Il y a neuf coïncidences, donc le point P_3 décrit une surface du neuvième ordre S_9.

2. Soit π un plan passant par la droite a_1. Les surfaces cubiques de R passant par le point $P \equiv (\pi, a_2)$ marquent un faisceau sur le plan π. On retrouve ainsi

dans ce plan une transformation connue depuis longtemps et étudiée par M. C. Le Paige, professeur à l'Université de Liége [C. Le Paige, *Sur deux transformations géométriques uniformes* (*Bull. de l'Acad. de Belgique*, 3e série, t. III et IV, 1883)].

On en déduit que toute section faite par un plan passant par l'une des droites a_1, a_2 est une courbe du cinquième ordre et donc que les droites a_1 et a_2 sont quadruples.

On vérifie aisément que les 17 points A_1, A_2, ... sont situés sur la surface. Remarquons en passant que, si l'un de ces points se trouve sur une droite a, tous les points du plan déterminé par ce point et l'autre droite a appartiennent à la surface. Celle-ci dégénère donc en un plan et une surface du huitième ordre.

Outre les droites a_1 et a_2, la surface contient 41 droites simples [G. de Vries, *Right lines on surfaces with multiple right lines* (*Proceedings of Amsterdam*, 28 avril 1902)].

3. Soient π un plan, B_1, B_2 les points d'intersection de ce plan avec les droites a_1, a_2. A un point Y de la surface S_9 on peut faire correspondre le point Y′ du plan π commun aux plans (Y, a_1) et (Y, a_2).

Le lieu des points Y′ correspondants des points d'une section par un plan passant par a_1 est une droite p_2 passant par B_2. De même, à une section par un plan passant par a_2 correspond une droite issue de B_1.

Cherchons l'ordre de la courbe α' image d'une courbe plane α de la surface. Les droites qui s'appuient sur a_1, a_2 et α engendrent une réglée du dixième ordre, car α est une courbe simple de cette réglée et il n'y a qu'une droite de cette dernière dans le plan de α. L'ordre de α' est donc 10.

Les points B_1, B_2 sont des points quintuples de α', car, si de B_1, par exemple, on projette la droite a_2 et la courbe α, il y a cinq rayons communs aux deux cônes qui rencontrent la droite et la courbe en des points différents.

La courbe α' passe évidemment par les points de rencontre du plan π avec les 41 droites simples de la surface rencontrées plus haut. Elle passe aussi par les points communs à α et π. Ces derniers points sont leur propre image.

Les courbes α' sont évidemment en nombre triplement infini. Trois points déterminent en général une et une seule de ces courbes.

4. Les courbes du neuvième ordre communes aux surfaces cubiques d'un réseau et s'appuyant sur une droite engendrent une surface d'ordre 24. Il y a donc 24 courbes du neuvième ordre c_9 s'appuyant sur les droites a_1, a_2 et passant par les points $A_1, \ldots, A_{17}$. Ces courbes appartiennent évidemment à la surface S_9, de même que les droites joignant les points (c_9, a_1) et (c_9, a_2).

L'image d'une telle courbe du neuvième ordre sur le plan π est une courbe du seizième ordre possédant deux points octuples en B_1 et B_2 et passant par les images des points $A_1, \ldots, A_{17}$ et par les points (π, c_9).

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1907).

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES ;

PAR M. A. VACQUANT.

On considère trois axes Ox, Oy, Oz *formant un trièdre trirectangle et les paraboloïdes ayant pour équation, par rapport à ces axes,*

$$x^2 + (y - az)^2 - 2\lambda z - R^2 = 0.$$

a *et* R *étant des constantes et* λ *un paramètre variable.*

I. *Par chacun des points* P, P′ *où l'un de ces paraboloïdes rencontre* Oz, *on mène la sphère qui contient les sections circulaires réelles passant par ce point; trouver le lieu de l'intersection des deux sphères relatives à* P *et* P′; *montrer que le plan radical de ces deux sphères est parallèle à un plan fixe et passe par le milieu de* PP′. *Par chacun des points* M *communs à ces deux sphères passe une troisième sphère qui correspond à un autre paraboloïde; quel est le lieu de* M *si cette sphère est fixe?*

II. *Le lieu des sections circulaires rencontrant* Oz *se compose, en général, d'un cône du second degré et d'une surface du troisième degré; montrer que cette dernière peut être engendrée par un cercle assujetti à rencontrer l'axe* Oz *et deux autres droites*

réelles fixes D, D′ *auxquelles il est constamment orthogonal.*

III. *Trouver les plans qui coupent la surface précédente suivant des cubiques circulaires; montrer que toute sécante menée dans un tel plan, par le point* A *où il rencontre* Oz, *coupe la cubique en des points* S *et* S′ *tels que le produit* $\overline{AS}.\overline{AS'}$ *soit constant si le plan est fixe.*

Aux points S, S′ *on mène les normales à la cubique; trouver le lieu de leur point de rencontre quand la sécante* SAS′ *varie ainsi que le plan de la courbe.*

I. Les points P et P′ où un paraboloïde ϖ,

$$(\varpi) \qquad x^2 - (y - az)^2 - 2\lambda z - R^2 = 0,$$

rencontre l'axe des z ont des cotes z', z'' définies par l'équation

$$a^2 z^2 + 2\lambda z - R^2 = 0,$$

et l'on a

$$z' + z'' = -\frac{2\lambda}{a^2}, \qquad z'z'' = -\frac{R^2}{a^2}.$$

Le plan xOy, ou $z = 0$, coupe les paraboloïdes ϖ, suivant un même cercle

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Par suite, les sections circulaires réelles d'un paraboloïde ϖ sont parallèles aux plans définis par l'équation quadratique

$$x^2 - (y - az)^2 - (x^2 + y^2 - z^2) = 0$$

ou

$$z[-2ay - (a^2 - 1)z] = 0.$$

La sphère Σ_1 qui contient les sections circulaires de ϖ, passant par P, a pour équation

$$x^2+(y-az)^2+2\lambda z-R^2 \\ -(z-z')[-2ay+(a^2-1)(z-z')]=0$$

ou

$$x^2+y^2+z^2-2ayz'+2[\lambda+(a^2-1)z']z-(a^2-1)z'^2-R^2=0.$$

Comme on a

$$\lambda=\frac{R^2-a^2z'^2}{2z'},\qquad \lambda+(a^2-1)z'=\frac{R^2+(a^2-2)z'^2}{2z'},$$

l'équation de la sphère Σ_1 peut s'écrire

$$(\Sigma_1)\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2-2ayz' \\ \qquad +[R^2+(a^2-2)z'^2]\dfrac{z}{z'}-(a^2-1)z'^2-R^2=0. \end{array}\right.$$

De même, l'équation de la sphère Σ_2 relative au point P′ est

$$(\Sigma_2)\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2-2ayz'' \\ \qquad +[R^2+(a^2-2)z''^2]\dfrac{z}{z''}-(a^2-1)z''^2-R^2=0. \end{array}\right.$$

En retranchant membre à membre les deux équations (Σ_1) et (Σ_2), on obtient le plan radical de ces deux sphères, savoir

$$-2ay(z'-z'')+R^2z\left(\frac{1}{z'}-\frac{1}{z''}\right) \\ +(a^2-2)z(z'-z'')-(a^2-1)(z'^2-z''^2)=0,$$

ou, en supprimant le facteur $z'-z''$, et remplaçant $z'z''$ par $\dfrac{-R^2}{a^2}$,

$$-2ay+2(a^2-1)z-(a^2-1)(z'+z'')=0.$$

On voit que ce plan, de direction fixe, coupe Oz au

point

$$z = \frac{z' + z''}{2} = -\frac{\lambda}{a^2},$$

milieu de PP'. L'équation de ce plan peut s'écrire

$$(1) \qquad -ay + (a^2 - 1)z + (a^2 - 1)\frac{\lambda}{a^2} = 0.$$

D'autre part, en ajoutant membre à membre les équations (Σ_1) et (Σ_2), on obtient l'équation

$$\begin{aligned} 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2ay(z' - z'') \\ + R^2 z\left(\frac{1}{z'} + \frac{1}{z''}\right) + (a^2 - 2)z(z' + z'') \\ - (a^2 - 1)[(z' + z'')^2 - 2z'z''] - 2R^2 = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} 2(x^2 + y^2 + z^2) + 4ay\frac{\lambda}{a^2} + 2\lambda z - 2(a^2 - 2)z\frac{\lambda}{a^2} \\ - (a^2 - 1)\left[\frac{4\lambda^2}{a^4} + \frac{2R^2}{a^2}\right] - 2R^2 = 0 \end{aligned}$$

ou

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 \\ & + \frac{2\lambda}{a^2}\left[ay + z - (a^2 - 1)\frac{\lambda}{a^2}\right] - \frac{R^2}{a^2}(2a^2 - 1) = 0. \end{aligned} \right.$$

On aura le lieu de l'intersection des sphères Σ_1 et Σ_2 en éliminant λ entre les équations (1) et (2), ce qui donne la quadrique

$$(Q) \quad \left\{ \begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 \\ & + \frac{2a^2}{a^2 - 1}z[ay - (a^2 - 1)z] - \frac{R^2}{a^2}(2a^2 - 1) = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette quadrique Q a pour centre l'origine, pour un de ses axes Ox, pour directions de sections circulaires les plans

$$z = 0, \qquad ay - (a^2 - 1)z = 0,$$

ce dernier étant parallèle à (1), comme cela devait être.

On voit aisément le genre de cette quadrique par le procédé de la décomposition en carrés (Q peut être un hyperboloïde réglé, ou un cône, ou un hyperboloïde non réglé, ou une quadrique imaginaire).

Soit $M(x_0, y_0, z_0)$ un point appartenant à l'intersection des sphères Σ_1 et Σ_2. Par tout point N de Oz, d'ordonnée γ, passe un paraboloïde ϖ auquel correspond une sphère Σ, passant par N, et ayant pour équation

$$(\Sigma)\quad \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 \\ \quad -2ay\gamma+[R^2+(a^2-2)\gamma^2]\dfrac{z}{\gamma}-(a^2-1)\gamma^2-R^2=0. \end{array}\right.$$

Pour que cette sphère Σ passe par le point $M(x_0\, y_0\, z_0)$ on doit avoir

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2-2ay_0\gamma+[R^2+(a^2-2)\gamma^2]\frac{z_0}{\gamma} \\ -(a^2-1)\gamma^2-R^2=0,$$

équation du troisième degré en γ dont les racines sont z', z'' donnant les sphères Σ_1 et Σ_2 relatives à un paraboloïde ϖ, de paramètre λ, et z''' donnant une troisième sphère Σ_3.

On a

$$z'z''z'''=\frac{R^2 z_0}{a^2-1},$$

et, comme

$$z'z''=-\frac{R^2}{a^2},$$

on aura

$$z'''=-\frac{a^2}{a^2-1}z_0.$$

Cette troisième sphère correspond à un autre paraboloïde ϖ_1 dont la valeur λ_1 du paramètre λ est

$$\lambda_1=\frac{R^2-a^2z'''^2}{2z'''}.$$

L'équation de la sphère Σ_3 s'obtient en remplaçant γ par z''' ou $\frac{-a^2}{a^2-1} z_0$ dans l'équation (Σ). On voit que les coefficients de cette équation ne dépendent que du paramètre z'''. Donc, pour que la sphère Σ_3 soit fixe, il faut et il suffit que z''' soit constant, et, par suite, que z_0 soit constant. Le lieu de M est donc une section circulaire

$$z = \text{const.}$$

de la quadrique Q.

II. Le lieu des sections circulaires C_1 rencontrant Oz et parallèles au plan $z = 0$ s'obtient en éliminant z' entre les équations (Σ_1) et

$$z - z' = 0,$$

ce qui donne le cône du second degré

$$x^2 + y^2 - 2ayz = 0,$$

ayant O pour sommet et pour l'un de ses axes Ox.

Le lieu des sections circulaires C_2, rencontrant Oz et parallèles au plan

$$-2ay + (a^2 - 1)z = 0,$$

s'obtient en éliminant z' entre les équations

$$(\Sigma_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 - 2ayz' \\ \quad + [R^2 + (a^2 - 2)z'^2] \dfrac{z}{z'} - (a^2 - 1)z'^2 - R^2 = 0 \end{array} \right.$$

et

$$-2ay + (a^2 - 1)(z - z') = 0,$$

définissant un cercle C_2. En tirant $2ay$ de cette dernière équation et portant dans l'équation (Σ_1), celle-ci

devient

$$x^2+y^2+z^2-(a^2-1)z'(z-z')$$
$$+[R^2+(a^2-2)z'^2]\frac{z}{z'}-(a^2-1)z'^2-R^2=0$$

ou

$$(x^2+y^2+z^2-zz')z'+R^2(z-z')=0.$$

Comme

$$z-z'=\frac{2a}{a^2-1}y,$$

le lieu cherché est la surface du troisième degré S_3 ayant pour équation

$$\left(x^2+y^2+\frac{2a}{a^2-1}yz\right)\left(z-\frac{2a}{a^2-1}y\right)+\frac{2aR^2}{a^2-1}y=0$$

ou

$$(S_3)\quad \left\{\begin{array}{l}\left[x^2+y\left(y+\frac{2a}{a^2-1}z\right)\right]\\ \quad\times[-2ay+(a^2-1)z]+2aR^2y=0.\end{array}\right.$$

Cette surface admet yOz pour plan de symétrie; elle passe par O et admet pour plan tangent en ce point le plan

$$y=0,$$

ou xOz, coupant S_3 suivant les droites

$$x^2z=0,$$

c'est-à-dire Ox et Oz comptée deux fois.

On peut considérer la surface S_3 comme engendrée par les cercles C_2 qui rencontrent Oz et deux autres droites D, D′ perpendiculaires au plan

$$(\delta)\qquad -2ay+(a^2-1)z=0,$$

et, par suite, orthogonales aux cercles C_2 parallèles à

ce plan δ. En effet, si l'on coupe la surface S_3 par un plan passant par Ox et perpendiculaire à δ, savoir

$$y + \frac{2a}{a^2 - 1} z = 0,$$

on obtient une section définie par l'équation précédente et la suivante,

$$x^2 \left(\frac{4a^2}{a^2 - 1} - a^2 - 1 \right) z - \frac{4a^2}{a^2 - 1} R^2 z = 0$$

ou

$$(a^2 + 1)^2 x^2 z - 4a^2 R^2 z = 0.$$

La section se compose donc de la droite Ox, ce qui devait être, et des droites parallèles D et D', ayant pour équations

$$y + \frac{2a}{a^2 - 1} z = 0,$$

$$x = \pm \frac{2aR}{a^2 + 1},$$

évidemment réelles, et rencontrant orthogonalement les cercles C_2.

III. Le cône des directions asymptotiques de la surface S_3 se compose du cône du second degré

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + \frac{2a}{a^2 - 1} yz = 0$$

et du plan

$$(2) \qquad -2ay + (a^2 - 1) z = 0.$$

Pour qu'un plan coupe la surface S_3 suivant une cubique circulaire, il faut et il suffit qu'il soit parallèle à deux génératrices communes au cône des directions asymptotiques de S_3 et au cône isotrope

$$(3) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Par l'intersection des cônes (1) et (3) on peut faire passer seulement deux plans réels, d'après la théorie des sections circulaires, ayant pour équation quadratique

$$x^2+y^2+\frac{2a}{a^2-1}yz-(x^2+y^2+z^2)=0$$

ou

$$z\left(\frac{2a}{a^2-1}y-z\right)=0.$$

Ces deux plans $z=0$ et

$$(2)\qquad y=\frac{a^2-1}{2a}z$$

sont les directions des plans cherchés. Les plans parallèles à (2) donnent les cercles générateurs de S_3 plus une droite à l'infini, et les plans parallèles à

$$z=0$$

donnent des cubiques circulaires Γ représentées par les équations

$$(4)\qquad z=h$$

et

$$\left(x^2+y^2+\frac{2ah}{a^2-1}y\right)[-2ay+(a^2-1)h]+2aR^2y=0.$$

Cette dernière s'écrit

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}&2ay(x^2+y^2)-(a^2-1)hx^2\\&\quad+\frac{h}{a^2-1}[4a^2-(a^2-1)^2]y^2-2a(h^2+R^2)y=0.\end{aligned}\right.$$

Une cubique Γ rencontre Oz en un point A, et une sécante issue de A la coupe en des points S et S′ projetés en s et s' sur xOy tels que

$$\overline{AS}.\overline{AS'}=\overline{Os}.\overline{Os'}=\rho'\rho'',$$

en désignant par ρ' et ρ'' les rayons vecteurs non nuls de la cubique (5) correspondant à une droite issue de O. En remplaçant, dans (5), x par $\rho\cos\omega$ et y par $\rho\sin\omega$, on en déduit

$$\rho'\rho'' = \frac{-2a(h^2+R^2)\sin\omega}{2a\sin\omega} = -(h^2+R^2)$$

et, par suite,

$$\overline{AS}.\overline{AS'} = \rho'\rho'' = -(h^2+R^2).$$

Cette relation montre que la cubique Γ est anallagmatique, A étant un pôle d'inversion, $-(h^2+R^2)$ la puissance de l'inversion. La cubique (5), égale à Γ, est anallagmatique, O étant pôle et $-(h^2+R^2)$ puissance d'inversion. Le lieu des points de rencontre des normales en S et S' à Γ se projette en vraie grandeur sur xOy suivant le lieu des points de rencontre des normales à la cubique (5) aux points s et s'. Or, un cercle tangent à (5) au point s et qui passe par s' est aussi tangent à (5) au point s', comme le montre l'inversion précédente appliquée à ce cercle et à la cubique (5). Le lieu cherché, dans le plan $z = h$, étant projeté sur xOy, est donc le lieu du centre c de ce cercle. Si α et β désignent les coordonnées de c, ce cercle a pour équation

$$(c) \qquad x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y-(h^2+R^2)=0.$$

Il coupe la cubique (5) en des points situés sur la conique

$$2ay(2\alpha x+2\beta y+h^2+R^2)-(a^2-1)hx^2$$
$$+\frac{h}{a^2-1}[4a^2-(a^2-1)^2]y^2-2a(h^2+R^2)y=0$$

ou

$$(c_1) \qquad \left\{\begin{array}{l}(a^2-1)hx^2-4a\alpha xy\\ \qquad\qquad +\left\{\frac{h}{a^2-1}[(a^2-1)^2-4a^2]-4a\beta\right\}y^2=0.\end{array}\right.$$

Or, le cercle (c) et la conique (c_1) doivent être bitangents aux points s et s' de la corde sOs'; comme la conique c_1 représente deux droites passant par O, il faut que ces deux droites soient confondues, ce qui donne, pour lieu de c, la parabole

$$4a^2\alpha^2 - (a^2-1)h\left\{\frac{h}{a^2-1}[(a^2-1)^2-4a^2]-4a\beta\right\} = 0$$

ou

$$(6) \quad 4a^2\alpha^2 + 4a(a^2-1)h\beta + h^2[4a^2-(a^2-1)^2] = 0.$$

Le point de rencontre C des normales à Γ aux points S et S′ a pour coordonnées α, β et $\gamma = h$. Le lieu de C quand la sécante SAS′ varie et quand h varie, c'est-à-dire le lieu demandé, s'obtient en remplaçant dans (6) h par γ; c'est donc le cône du second degré

$$(7) \quad 4a^2\alpha^2 + 4a(a^2-1)\beta\gamma + [4a^2-(a^2-1)^2]\gamma^2 = 0.$$

BIBLIOGRAPHIE.

Théorie et usage de la règle a calculs (*règle des écoles; règle Mannheim*), par *P. Rozé*. — 1 vol. in-8° de 118 pages avec 86 figures dans le texte et 1 planche hors texte. Paris, Gauthier-Villars, 1907. Prix : 3fr,50.

L'Ouvrage de M. Rozé nous paraît constituer l'un des plus complets qui aient été consacrés à la règle à calculs. Après avoir rappelé l'essentiel de la théorie des progressions et de celle des logarithmes, l'auteur donne des indications détaillées sur la disposition et l'emploi des deux règles les plus en usage, la *règle des écoles* (disposition Tserepachinsky) et la *règle Mannheim*. Viennent ensuite de nombreux exemples de calculs effectués au moyen de la règle, dans des pro-

blèmes empruntés à l'Arithmétique, à la Géométrie, à l'Astronomie, à la Mécanique et à la Physique. Un dernier Chapitre contient des conseils pratiques relatifs au choix et à l'entretien d'une règle.

Espérons que ce Traité, très soigneusement rédigé et très pratique, contribuera à la vulgarisation du merveilleux instrument inventé par Gunter. R. B.

N.-H. Abel, sa vie et son oeuvre, par *Ch. Lucas de Peslouan*. — 1 vol. in-8 de 168 pages avec portrait. Prix : 5 fr. Paris, Gauthier-Villars, 1906.

En pages émues, M. Lucas de Peslouan retrace l'existence tragique du grand mathématicien norvégien, qui mourut à vingt-sept ans, misérable et presque inconnu. Les lettres d'Abel, dont l'Ouvrage contient de nombreux extraits, nous font pénétrer cette âme charmante, à la fois sublime et ingénue, ses ardeurs, ses découragements, ses naïvetés et ses gamineries. Entre les énoncés de deux théorèmes admirables, il informe son ami Holmboë que « Poisson est un petit homme avec un joli petit ventre », ou bien il lui confie que les personnes peu sévères qu'il rencontre au Palais-Royal « ne sont nullement indiscrètes ».

M. Lucas de Peslouan nous montre donc un Abel très vivant. Mais un Livre purement anecdotique, consacré à l'un des plus profonds génies qui aient rayonné sur le monde, constituerait presque un manque de respect. C'est l'histoire de la pensée d'Abel qui intéresse le plus l'humanité. L'auteur l'a bien compris, et, dans une série d'analyses concises, mais très bien faites, il résume les découvertes éclatantes qui ont ouvert un champ nouveau à la théorie des fonctions et à celle des équations algébriques.

Je ne veux pas terminer ce trop bref compte rendu sans signaler quelques réflexions, qui m'ont paru fort justes, sur les rôles respectifs des grands créateurs dans les Sciences mathématiques et dans les Sciences physiques. R. B.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2064.

(1907. p. 95.)

Un point C *se meut sur un cercle de rayon égal à l'unité. Un autre point, situé originairement au centre* O *du cercle, se meut avec la même vitesse que le point* C *sur une courbe dont la tangente passe constamment par ce point. Démontrer que le rayon de courbure en un point quelconque* M *de cette courbe est égal au segment intercepté sur le rayon* OC *par la normale en* M.

(Dr W. Kapteyn.)

NOTE

Cette question est résolue dans une lettre de M. d'Ocagne, dont un extrait a été inséré à la page 173 du présent Volume.

2068

(1907, p. 96.)

Quand le centre de gravité d'un tétraèdre se confond avec celui des six arêtes ou bien avec le centre de gravité de la surface, les arêtes opposées du tétraèdre sont deux à deux égales. Dr J. Schuh.

SOLUTION

Par M. V. Retali.

Les segments qui unissent les points milieux des arêtes opposées, étant bissectés par le barycentre du tétraèdre, il s'ensuit que, si les arêtes opposées sont deux à deux égales, le barycentre du tétraèdre coïncide avec celui des arêtes et dans le cas contraire les deux barycentres sont deux points distincts.

Lorsque les arêtes opposées sont deux à deux égales les quatre faces sont égales et réciproquement; il suffit donc de démontrer que, si les barycentres du tétraèdre et de sa surface coïn-

cident, les faces sont égales : or, si les faces du tétraèdre sont égales, le barycentre de sa surface coïncide avec le barycentre des barycentres des faces et par suite avec celui du tétraèdre.

Si au contraire les faces ne sont pas égales, le barycentre du tétraèdre est différent du barycentre des barycentres des faces, c'est-à-dire les centres de gravité du tétraèdre et celui de sa surface sont deux points distincts.

2071.

(1907, p. 96.)

Le tétraèdre dont les sommets ont pour coordonnées tétraédriques (a, b, c, d), (b, c, d, a), (c, d, a, b), (d, a, b, c) *est, de quatre manières différentes, en relations hyperboloïdiques avec le tétraèdre de référence.*

(Dr P. Zeeman Gz.)

SOLUTION

Par M. E. Genty.

Soient ABCD le tétraèdre de référence; $(x, y, z, t)_{1,2,3,4}$ les coordonnées de quatre points quelconques A′, B′, C′, D′.

Il est extrêmement facile de voir que les conditions qui expriment que les droites AA′, BB′, CC′, DD′ sont quatre génératrices d'un même système d'un hyperboloïde sont :

$$(1)\qquad \begin{cases} t_2\, y_3\, z_4 = z_2\, t_3\, y_4, \\ t_3\, x_4\, z_1 = x_3\, z_4\, t_1, \\ y_4\, t_1\, x_2 = x_4\, y_1\, t_2, \\ y_1\, z_2\, x_3 = z_1\, x_2\, y_3. \end{cases}$$

Ainsi que cela doit être, l'une quelconque de ces conditions est une conséquence des trois autres.

Mais il est clair que, sans nuire à la généralité, on peut poser :

$$y_1 = x_2 = n, \qquad z_2 = y_3 = l, \qquad t_3 = z_4 = r;$$

les conditions (1) donnent alors :

$$t_2 = y_4 = q, \qquad x_3 = z_1 = m, \qquad x_4 = t_1 = p,$$

et l'on a, pour l'expression la plus générale des coordonnées

des sommets A′, B′, C′, D′ d'un tétraèdre en relation hyperboloïdique avec le tétraèdre de référence,

$$\begin{matrix} x_1, & n, & m, & p; \\ n, & y_2, & l, & q; \\ m, & l, & z_3, & r; \\ p, & q, & r, & t_4; \end{matrix}$$

et l'on voit qu'elles forment un Tableau symétrique par rapport à la diagonale $x_1 y_2 z_3 t_4$.

Or on peut former, avec les coordonnées de l'énoncé, quatre tableaux semblables, savoir :

$$\begin{matrix} a, & b, & c, & d; & & b, & c, & d, & a; \\ b, & c, & d, & a; & & c, & d, & a, & b; \\ c, & d, & a, & b; & & d, & a, & b, & c; \\ d, & a, & b, & c; & & a, & b, & c, & d; \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} c, & d, & a, & b; & & d, & a, & b, & c; \\ d, & a, & b, & c; & & a, & b, & c, & d; \\ a, & b, & c, & d; & & b, & c, & d, & a; \\ b, & c, & d, & a; & & c, & d, & a, & b; \end{matrix}$$

ce qui démontre la proposition.

Autre solution par M. Retali.

2072.

(1907, p. 144.)

Construire un quadrilatère, connaissant les centres de gravité des quatre triangles formés par trois sommets du quadrilatère. (Dr J. de Vries.)

SOLUTION

Par M. Letierce.

Soient ABCD le quadrilatère cherché et A_1, B_1, C_1, D_1 les centres de gravité des triangles BCD, CDA, DAB, ABC. Le point A_1 étant le centre des moyennes distances de B, C et D, la droite AA_1 passe par le centre O des quatre points A, B, C, D, et l'on a : $\overline{OA} = -3\overline{OA_1}$; il en est

de même des droites BB_1, CC_1, DD_1. Donc ABCD est homothétique à $A_1B_1C_1D_1$, O étant le centre d'homothétie et -3 le rapport d'homothétie. Comme le point O est aussi le centre des moyennes distances des quatre points A_1, B_1, C_1, D_1, on en déduit la solution de la question.

Autres solutions par MM. Droz-Farny, Kreis, Maes, Parrod, Tétu.

2073.

(1907, p. 144.)

On donne dans le plan d'un triangle ABC *deux points* P_1 *et* P_2. *Sur* BC *on détermine un point* A′ *tel que* $A'P_1$ *et* $A'P_2$ *soient conjuguées harmoniques par rapport à* A′A *et* BC. *On détermine d'une façon analogue les points* B′ *et* C′ *sur* CA *et sur* AB. *Démontrer que les droites* AA′, BB′, CC′ *sont concourantes.* (Dr J. de Vries.)

PREMIÈRE SOLUTION

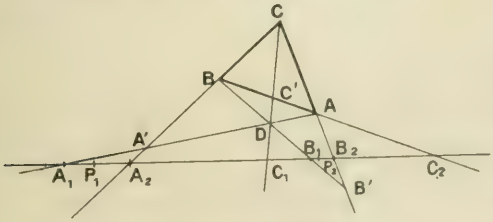
Par M. Letierce.

Si l'on transforme homographiquement la figure de façon que les points P_1 et P_2 deviennent les points cycliques, les droites AA′, BB′ et CC′ sont les hauteurs du nouveau triangle, ce qui démontre la proposition.

DEUXIÈME SOLUTION

Par M. H. Kreis

Soit A′ un point situé sur le côté BC jouissant de la propriété énoncée. En coupant les quatre rayons harmoniques



$A'P_1$, $A'P_2$, A′A, A′C par la transversale P_1P_2 on obtient un

groupe de points P_1, P_2, A_1, A_2 tels que A_1 est conjugué harmonique de A_2 par rapport aux points donnés $P_1 P_2$. Le point A_1 est donc unique et il n'y a par suite qu'un point A' sur le côté BC qui satisfasse au problème. Pour construire les points B' et C' on aurait pareillement à déterminer les points d'intersection B_2 et C_2 des côtés AC et AB avec la transversale $P_1 P_2$, puis leurs conjugués harmoniques B_1 et C_1 par rapport à $P_1 P_2$. BB_1 coupe AC en B' et CC_1 coupe AB en C'. De ce qui précède résulte que les six points A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2 appartiennent à une involution.

Désignons par D le point d'intersection des droites AA' et BB'; on sait alors, en vertu du théorème de Desargues, que, si les cinq côtés AD, BC; BD, CA; AB du quadrangle complet ABCD passent par les cinq points A_1, A_2; B_1, B_2; C_2 de l'involution ci-dessus, le sixième côté CD passera nécessairement par le sixième point C_1. Donc CC' passe par le point D.

Autres solutions par MM. Droz-Farny, Maes, Parrod.

QUESTIONS.

2081. Construire une hyperbole bitangente à deux cercles et ayant un axe transverse de longueur donnée.

(M. Tétu.)

2082. On considère sur une courbe un point d'inflexion O et un point voisin M. Si l'on désigne par R_1 le rayon du cercle osculateur en M, par R_2 le rayon du cercle qui est tangent à la courbe en M et qui passe en O, par R_3 le rayon du cercle qui passe en M et qui est tangent à la courbe en O, les rayons R_1, R_2, R_3 tendent à devenir inversement proportionnels aux nombres 3, 2, 1, lorsque le point M tend à se confondre avec le point O. (G. Fontené.)

2083. Soient S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 cinq semi-sphères. S'il existe une semi-sphère tangente, d'une part, aux deux semi-plans qui touchent S_1, S_2 et S_3, et inscrite, d'autre part, au semi-cône de révolution circonscrit à S_4 et S_5, on peut obtenir neuf semi-sphères analogues en permutant de toutes les manières possibles les rôles assignés aux semi-sphères S_1, S_2, S_3, S_4, S_5. (R. B.)

[K10c]

ETUDE SUR LE CALCUL DE π PAR DES FORMULES DÉRIVÉES DE LA THÉORIE DES PÉRIMÈTRES ET DES RAYONS;

PAR M. G. HILLERET,

Professeur de sciences à l'École navale, en retraite.

1. Les calculs à effectuer pour obtenir la valeur de π, avec une certaine approximation, par les méthodes classiques des périmètres et des rayons sont, on le sait, des plus laborieux. Cette étude a pour but de montrer que si, au lieu de s'en tenir à ces procédés élémentaires, on formait des fonctions simples des périmètres et des rayons, on pourrait, assez rapidement et avec beaucoup moins de peine, obtenir des valeurs infiniment plus approchées de π et d'une convergence bien plus rapide.

2. Exposons d'abord rapidement les méthodes des périmètres et des rayons :

En désignant par $\overline{P_k}$ la longueur du demi-périmètre du polygone régulier convexe, de $N = n \times 2^k$ côtés, circonscrit à une circonférence de rayon arbitraire $\overline{A_k}$; par $\overline{p_k}$, la longueur du demi-périmètre du polygone régulier convexe, du même nombre N de côtés, inscrit dans une circonférence de rayon arbitraire $\overline{R_k}$; le nombre π n'est autre chose que la limite des rapports

$$\left.\begin{aligned} P_k &= \frac{\overline{P_k}}{\overline{A_k}}, \\ p_k &= \frac{\overline{P_k}}{\overline{R_k}}, \end{aligned}\right\} \text{ et réciproquement } \frac{1}{\pi} \text{ est la limite des rapports } \left\{\begin{aligned} a_k &= \frac{\overline{A_k}}{\overline{P_k}}, \\ r_k &= \frac{\overline{R_k}}{\overline{p_k}}, \end{aligned}\right.$$

lorsque, n restant constant, k augmente indéfiniment.

Quelles que soient les longueurs des périmètres et des rayons, des polygones réguliers auxquels se réfèrent les rapports P, p, a, r, comme les polygones réguliers convexes du même nombre de côtés sont tous semblables, il en résulte qu'on a toujours

$$P_k = \frac{1}{a_k} \qquad \text{et} \qquad p_{k'} = \frac{1}{r_{k'}},$$

et que, si par un procédé quelconque de démonstration on prouve que

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = \dfrac{2 P_0 p_0}{P_0 + p_0}, \\ p_1 = \sqrt{P_1 p_0}, \end{array}\right\} \text{ on en déduira nécessairement } \left\{\begin{array}{l} a_1 = a_0 + r_0, \\ r_1 = \sqrt{a_1 r_0}, \end{array}\right\} \text{ et } \textit{réciproquement.}$$

Calculer π par les valeurs successives P_k, p_k constitue la méthode des périmètres; nous appellerons *méthode des rayons,* celle qui consiste à calculer $\frac{1}{\pi}$ par les valeurs successives de a_k et r_k; cette appellation, que nous préférons à celle des *isopérimètres,* employée d'habitude, présente l'avantage de ne laisser rien préjuger sur le mode de démonstration des formules servant au calcul des éléments a_k ou r_k et rappelle, au contraire, la base théorique du procédé.

3. Afin de simplifier des démonstrations ultérieures, nous chercherons d'abord les limites des différences $P - p$ et $r - a$ en fonction de N.

Soit $\bar{c}$ la longueur du côté du polygone régulier convexe de N côtés ayant pour demi-périmètre $\bar{p}$ et pour rayon $\bar{R}$; on aura

$$p = \frac{\bar{N}c}{2\bar{R}} = \frac{Nc}{2},$$

et l'on démontre en géométrie que

$$P = \frac{Nc}{\sqrt{4 - c^2}},$$

$$p_1 = N\sqrt{2 - \sqrt{4 - c^2}},$$

on en déduit

$$P - p = \frac{P p_1^2}{2N^2} = \frac{P p P_1}{2N^2}.$$

Or Pp et P_1 diminuent quand N augmente; donc, pour $N \geq 6$, on aura

$$P^{(6)} p^{(6)} P^{(12)} > P p P_1 > \pi^3,$$

ou bien, comme $p^{(6)} = 3$, $P^{(6)} = 2\sqrt{3}$, $P^{(12)} = 12(2 - \sqrt{3})$,

$$[72(2\sqrt{3} - 3) = 33,415] > P p P_1 > 31,0063,$$

et finalement

$$\frac{15,5}{N^2} < P - p < \frac{16,71}{N^2} \qquad \text{pour} \qquad N \geq 6;$$

de la même façon, on aurait

$$r - a = \frac{P_1}{2N^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1,57}{N^2} < r - a < \frac{1,61}{N^2} \qquad \text{pour} \qquad N \geq 6.$$

4. Cherchons maintenant les limites des différences $P - \pi$ et $\pi - p$ en fonction de N.

Pour cela prenons la fonction $\frac{p + mP}{1 + m}$, dans laquelle m désigne un coefficient numérique positif.

Quel que soit m, la limite de $\frac{p + mP}{1 + m}$ étant égale à π, lorsque le nombre des côtés augmente indéfiniment, il

est clair que $\frac{p + mP}{1 + m}$ sera supérieur ou inférieur à π, si, à partir d'un certain rang, on a pour toute valeur de k

$$\frac{p_k + mP_k}{p_{k+1} + mP_{k+1}} \gtrless 1.$$

Afin de simplifier l'écriture supprimons l'indice k; l'inégalité deviendra

$$\frac{p + mP}{p_1 + mP_1} \gtrless 1,$$

ou bien, en remplaçant p et P par leurs valeurs en fonction de p_1 et P_1, et posant $x = \frac{P_1}{p_1}$,

$$\frac{2 + (m - 1)x^2}{x(2 - x^2)(1 + mx)} \gtrless 1,$$

et finalement

$$m \gtrless \left[\frac{2 - x^2}{x^2(1 + x)} = M\right].$$

Or le deuxième membre de cette inégalité vaut $\frac{1}{2}$ pour $x = 1$, c'est-à-dire $N = \infty$, et décroît en même temps que N; de plus la fonction $\frac{p + mP}{1 + m}$, pour des valeurs finies et déterminées de p et P, augmente en même temps que m, et varie de p à P; donc pour $m \geqq \frac{1}{2}$, l'expression $\frac{p + mP}{1 + m}$ est supérieure à π et en diffère d'autant plus que m est grand.

Quel que soit le nombre N des côtés des polygones P et p, on a donc toujours

$$\pi < \frac{P + 2p}{3}.$$

Supposons maintenant que $p^{(8)}$ et $P^{(8)}$ soient les demi-périmètres des octogones réguliers convexes,

alors

$$x = 1,0196,$$
$$M = 0,456,$$

et, pour tous les polygones dont le nombre des côtés est $\geqq 8$, on aura

$$\frac{p + 0,456\,P}{1,456} < \pi;$$

mais, si P_0, p_0 sont les demi-périmètres des hexagones réguliers, la valeur

$$m_0 = \frac{\pi - p_0}{P_0 - \pi} = \frac{\pi - 3}{2\sqrt{3} - \pi} = 0,43903$$

donne évidemment

$$\frac{p_0 + m_0 P_0}{1 + m_0} = \pi.$$

Comme

$$0,456 > 0,43903 > \left[0,43902 = \frac{18}{41}\right],$$

on en conclut, *a fortiori*, que, pour $N \geqq 6$, on a

$$\frac{p + \frac{18}{41} P}{1 + \frac{18}{41}} < \pi,$$

c'est-à-dire, en résumé,

$$\frac{18\,P + 41\,p}{59} < \pi < \frac{P + 2p}{3},$$

que l'on peut écrire

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{3}(P - p) < P - \pi < \frac{41}{59}(P - p) \\ \frac{18}{59}(P - p) < \pi - p < \frac{P - p}{3} \end{array}\right\} 2(\pi - p) < P - \pi < \frac{41}{18}(\pi - p),$$

exprimant $(P - p)$ en fonction de N (n° 3), on aura donc pour $N \geqq 6$

$$\frac{10,33}{N^2} < P - \pi < \frac{11,61}{N^2},$$

$$\frac{4,73}{N^2} < \pi - p < \frac{5,57}{N^2},$$

que l'on peut écrire

$$\pi = P - \frac{10,97}{N^2} \pm \frac{0,64}{N^2},$$

$$\pi = p + \frac{5,15}{N^2} \pm \frac{0,42}{N^2}.$$

Nous appellerons valeurs *rectifiées* de P et p les expressions $P - \frac{10,97}{N^2}$ et $p + \frac{5,13}{N^2}$.

5. Ces préliminaires établis, nous étudierons quelques combinaisons simples des éléments P, p, a, r; nous avons vu que $\frac{P + 2p}{3} = \varpi$ était une valeur par excès de π. Quelles sont les limites de $\varpi - \pi$ en fonction de N?

On a successivement

$$P_1 - p = \tfrac{1}{2}(P - p) - \frac{(P - p)^2}{2(P + p)},$$

$$P_1 - p = \tfrac{1}{2}(P - p) - \varepsilon \quad \text{en posant} \quad \varepsilon = \frac{(P - p)^2}{2(P + p)},$$

$$p_1 - P_1 = \tfrac{1}{2}(p - P_1) - \varepsilon' \quad \text{en posant} \quad \varepsilon' = \tfrac{1}{2}(P + p) - \sqrt{Pp},$$

.....

$$p_{k-1} - P_{k-1} = \tfrac{1}{2}(p_{k-2} - P_{k-1}) - \varepsilon'_{k-1},$$

$$P_k - p_{k-1} = \tfrac{1}{2}(P_{k-1} - p_{k-1}) - \varepsilon_{k-1};$$

ajoutant membre à membre

$$P_k - p = \tfrac{1}{2}(P - p_{k-1}) - \Sigma\varepsilon - \Sigma\varepsilon',$$

si k tend vers l'infini, on a $\lim P_k = \lim p_{k-1} = \pi$ et finalement

$$\pi = \frac{P + 2p}{3} - [E = \tfrac{2}{3}\Sigma\varepsilon + \tfrac{2}{3}\Sigma\varepsilon'].$$

6. Cherchons les limites de E : commençons par $\Sigma\varepsilon$; on a

$$\varepsilon = \frac{(P-p)^2}{2(P+p)} < \frac{(P-p)^2}{4\pi} \text{ car } P+p \text{ diminue quand N augmente,}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{(P_1-p_1)^2}{2(P_1+p_1)} < \frac{1}{16}\,\frac{(P-p)^2}{4\pi} \quad \text{car} \quad P_1 - p_1 < \frac{P-p}{4},$$

.....

$$\Sigma\varepsilon < \frac{(P-p)^2}{4\pi}\,\frac{16}{15} \quad \text{et} \quad \tfrac{2}{3}\Sigma\varepsilon < \frac{8}{45}\,\frac{(P-p)^2}{\pi}.$$

7. Cherchons la limite inférieure de $\Sigma\varepsilon$; on a

$$\varepsilon = \frac{(P-p)^2}{2(P+p)},$$

$$\varepsilon_1 = \frac{P_1 - p_1}{2(P+p_1)} = \frac{\alpha^2(P-p)^2}{2(P_1+p_1)}$$

en désignant par α un coefficient numérique qui augmente en même temps que N et a pour limite $\frac{1}{4}$,

$$\varepsilon_1 > \frac{\alpha^2(P-p)^2}{2(P+p)},$$

$$\varepsilon_2 > \frac{\alpha_1^2(P_1-p_1)^2}{2(P_2+p_2)} > \frac{\alpha^2\alpha_1^2(P-p)^2}{2(P_2+p_2)} > \frac{\alpha^4(P-p)^2}{2(P+p)}.$$

$$\Sigma\varepsilon > \frac{(P-p)^2}{2(P+p)}\,\frac{1}{1-\alpha^2};$$

or, pour tout polygone dont le nombre des côtés est ≥ 6, on a

$$\alpha > 0,2361 \quad \text{et} \quad P + p > 6,4641,$$

donc

$$\Sigma\varepsilon > \frac{(P-p)^2}{12,208}$$

et finalement

$$\tfrac{2}{3}\Sigma\varepsilon > \frac{(P-p)^2}{18,312}.$$

8. Cherchons les limites de $\Sigma\varepsilon'$; on a

$$\varepsilon'_1 = \tfrac{1}{2}(P_1+p) - \sqrt{P_1 p} < \frac{(P_1-p)^2}{8p_1}$$

car, d'une façon générale, $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8\sqrt{ab}}$,

$$\varepsilon'_2 < \frac{(P_2-p_1)^2}{8p_2} < \frac{(P_1-p)^2}{8p_2}\,\frac{1}{16}$$

car $P_2 - p_1 = \lambda(P_1-p)$ en désignant par λ un facteur numérique qui diminue en même temps que N et a pour limite $\frac{1}{4}$,

$$\varepsilon'_2 < \frac{(P_1-p)^2}{8p_1}\,\frac{1}{16},$$

. . . . . .

$$\Sigma\varepsilon' < \frac{(P_1-p)^2}{8p_1}\,\frac{16}{15} < \frac{(P-p)^2}{30p_1}$$

car $P_1 - p = \frac{P-p}{1+x}$ en posant $1 < x = \frac{P}{p} < 2$,

$$\tfrac{2}{3}\Sigma\varepsilon' < \frac{1}{45}\,\frac{(P-p)^2}{p_1}.$$

9. Passons à la limite inférieure de $\Sigma\varepsilon'$; on a

$$\varepsilon'_1 > \frac{(P_1-p)^2}{8\pi}$$

car, d'une façon générale, $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} > \frac{(a-b)^2}{4(a+b)}$,

$$\varepsilon'_2 > \left[\frac{(P_2-p_1)^2}{8\pi} = \frac{(P_1-p)}{8\pi}\,\lambda^2\right],$$

$$\varepsilon'_3 > \left[\frac{(P_3-p_2)^2}{8\pi} = \frac{(P_2-p_1)\lambda'^2}{8\pi}\right] > \frac{(P_1-p)^2}{8\pi}\,\lambda^4,$$

. . . . . .

$$\tfrac{2}{3}\Sigma\varepsilon' > \frac{(P_1-p)^2}{12\pi}\,\frac{1}{1-\lambda^2} > \frac{(P-p)^2}{12\pi}\,\frac{1}{(1+x)^2(1+\lambda^2)}.$$

Mais pour $N \geq 6$, on a $x < \frac{2\sqrt{3}}{3}$ et $\lambda > \frac{1}{4,02}$, donc,

enfin,

$$\tfrac{2}{3}\Sigma\varepsilon' > \frac{(P-p)^2}{164,2}.$$

Groupant les valeurs trouvées pour les ε et ε', on a donc

$$E = \frac{P+2p}{3} - \pi < \frac{(P-p)^2}{15}\left[\frac{8}{\pi} + \frac{1}{p_1}\right],$$

or, pour $N \geqq 8$ on a $p_1 \geqq 3,12144$ et $E > \frac{(P-p)^2}{15,7}$; mais on peut vérifier directement que cette inégalité est également satisfaite pour tous les polygones réguliers convexes dont le nombre des côtés est < 8; donc elle est vraie, quel que soit le nombre des côtés.

On a de même

$$E > (P-p)^2\left[\frac{1}{164,2} - \frac{1}{18,312}\right] > \frac{(P-p)^2}{16,5},$$

mais seulement pour $N \geqq 6$; en résumé,

$$\frac{(P-p)^2}{16,46} < \frac{P+2p}{3} - \pi < \frac{(P-p)^2}{15,6} \qquad \text{pour} \qquad N > 6.$$

Substituant à $P-p$, les valeurs trouvées (n° 3), on a finalement

$$\frac{14,6}{N^4} < \varpi - \pi < \frac{17,8}{N^4}.$$

Par une analyse plus rigoureuse, on verrait que pour $N \geqq 6$, on a réellement

$$\frac{15,3}{N^4} < \varpi - \pi < \frac{16,98}{N^4}.$$

10. On démontre d'une façon analogue, mais un peu plus simple, qu'en posant

$$\varpi' = \frac{3}{a+2r} \qquad \text{on a} \qquad \frac{1,70}{N^4} < \pi - \varpi' < \frac{1,76}{N^4},$$

on en déduit alors très facilement que

$$\frac{2,55}{N^4} < \varpi'' - \pi < \frac{2,592}{N^4}, \qquad \text{en posant} \qquad \varpi'' = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{r} + \frac{4}{a+r}\right)$$

et

$$\frac{1,31}{N^4} < \varpi''' - \pi < \frac{1,73}{N^4}, \qquad \text{en posant} \qquad \varpi''' = \frac{4}{4r_1 - r}.$$

Les valeurs $\frac{3}{a+2r} = \varpi'$ et $\frac{3}{4r_1 - r} = \varpi'''$ ont été indiquées, mais sans en préciser les limites d'erreurs, par MM. Rouché et Comberousse (*Géométrie élémentaire*, 1901, p. 201), c'est à ce titre que nous les avons choisies, parmi beaucoup d'autres du même genre.

11. Bien que ces formules fournissent des valeurs très supérieures, comme précision, à celles obtenues par P ou p, on peut former avec elles d'autres combinaisons donnant des résultats encore meilleurs : par exemple, l'expression

$$\Phi = \frac{3\varpi' + 2\varpi''}{5} = \frac{1}{15}\left(\frac{2}{r} + \frac{8}{a+r} + \frac{27}{a+2r}\right),$$

déjà signalée par nous-même (*Comptes rendus*, 18 mars 1907), est telle que pour $N \geqq 6$, on a

$$\pi = \Phi - \frac{0,59895}{N^6}$$

avec une erreur, en valeur absolue, inférieure à $\frac{35}{10^5 . N^6}$.

A titre documentaire, pour $N = 12$, la valeur rectifiée $\Phi + \frac{0,59895}{N^6}$ donne une valeur approchée de π, exacte à moins de $\frac{1,2}{10^{10}}$.

Malheureusement, ces nouvelles relations néces-

sitent pour être démontrées des connaissances mathématiques qui, bien que fort simples, sont encore trop élevées pour des élèves des classes élémentaires.

[K11e, K12bα]

SUR LE PROBLÈME D'APOLLONIUS ET SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CYCLES;

PAR M. R. BRICARD.

1. Le problème d'Apollonius :

Construire un cercle tangent à trois cercles donnés,

a souvent attiré l'attention des géomètres. On connaît les solutions de Viète, de Gergonne et celle, plus récente, de M. Fouché. Laguerre y a trouvé une application élégante de la Géométrie de direction, qu'il avait créée, et a ramené le problème, au moyen d'une transformation par semi-droites réciproques, à la construction du cercle qui passe par trois points donnés.

C'est également l'application des principes de la Géométrie de direction qui m'a conduit à une construction que je crois nouvelle et plus simple que toutes les constructions antérieures. Cette construction permet, comme on le verra, de déterminer *individuellement,* par des constructions linéaires, les divers cercles tangents à trois cercles donnés, quand on suppose connues les diverses tangentes communes à ces trois cercles pris deux à deux.

2. Dans un précédent article [1], j'ai montré com-

---

[1] *Nouvelles Annales*, 1906, p. 159.

ment on peut représenter les semi-droites et les cycles d'un plan par les points d'un cône du second ordre (S) et les coniques tracées sur ce cône. La représentation jouit des propriétés suivantes :

1° *Des semi-droites parallèles sont représentées par des points du cône* (S) *situés sur une même génératrice;*

2° *Une semi-droite et un cycle tangents sont représentés par un point et une conique qui contient ce point;*

3° *Deux cycles tangents sont représentés par deux coniques tangentes;*

4° *Si une semi-droite varie en restant tangente à un cycle, il y a correspondance homographique entre la division formée par les points de contact sur le cycle et la division formée par les points représentatifs de la semi-droite variable sur la conique représentative du cycle.*

D'après la propriété 1°, toute génératrice du cône peut être considérée comme représentant une *direction* de semi-droites. On appellera alors *rapport anharmonique* de quatre semi-droites, le rapport anharmonique des quatre génératrices qui représentent leurs directions. De même, six semi-droites seront dites *en involution,* quand les six génératrices représentatives de leurs directions seront elles-mêmes en involution sur le cône.

Dans son premier Mémoire sur la Géométrie de direction [1], Laguerre a défini comme il suit l'involution de six semi-droites : *Soient six semi-droites*

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique de France,* 1879-1880; *Œuvres,* t. II, p. 592.

données et menons à un cycle quelconque les six tangentes qui leur sont parallèles; on dira que les semi-droites dont il s'agit sont en involution quand les points de contact sont eux-mêmes en involution sur le cycle.

Il est facile de constater l'identité des deux définitions. Considérons six semi-droites en involution, au sens de Laguerre, et soit C le cycle auquel on mène des tangentes parallèles à ces six semi-droites. Soit sur le cône (S) Γ la conique représentative du cycle C. Les tangentes au cycle C, parallèles aux semi-droites considérées, ont leurs six points de contact en involution; donc les points représentatifs de ces tangentes sont eux-mêmes en involution sur Γ, et les génératrices de (S) qui contiennent ces six points sont aussi en involution; les six semi-droites sont donc en involution, au sens que j'ai donné plus haut.

La considération des semi-droites en involution jouera un rôle important dans tout ce qui suit.

3. Je supposerai, comme dans l'article rappelé plus haut, que le cône (S) a pour équation

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0. \tag{1}$$

Les coordonnées d'un point quelconque m de ce cône peuvent être représentées par les formules

$$x = \lambda^2 - \mu^2, \qquad y = 2\lambda\mu, \qquad z = \lambda^2 + \mu^2. \tag{2}$$

Je dirai que λ, μ sont les *paramètres* du point m, et aussi de la semi-droite représentée par le point m. A un système de paramètres λ, μ ne correspond qu'un point m; *mais la réciproque n'est pas vraie :* à un point m correspondent deux systèmes opposés de paramètres (λ, μ) et $(-\lambda, -\mu)$.

Le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ a une valeur constante et unique pour tous les points du cône (S) qui sont alignés sur une même génératrice. On en conclut, et cette remarque servira tout à l'heure, que six semi-droites sont en involution quand les valeurs du rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ correspondant aux génératrices représentatives de ces six semi-droites sont elles-mêmes en involution.

Considérons maintenant les divers cycles tangents à un même cycle C. On peut supposer, grâce à une transformation homographique changeant le cône (S) en lui-même, et convenablement choisie, que le cycle C est représenté par la conique à l'infini Γ de ce dernier, conique dont l'équation tangentielle est

$$(3) \qquad u^2 + v^2 - w^2 = 0.$$

Ainsi, tout cycle tangent à C est représenté par une conique située dans un plan

$$ux + vy + wz - 2 = 0,$$

u, v et w satisfaisant à (3). (Je prends le terme constant égal à -2 pour simplifier les formules ultérieures.)

On satisfait à l'équation (3) en posant

$$(4) \qquad u = l^2 - m^2, \qquad v = 2lm, \qquad w = l^2 + m^2.$$

Je dirai que l, m sont les *paramètres* d'une conique tangente à Γ (ou d'un cycle tangent à C). Une telle conique a deux systèmes de paramètres (l, m) et $(-l, -m)$.

Exprimons maintenant qu'un point, de paramètres λ, μ, est sur une conique de paramètres l, m. On a la condition

$$(l^2 - m^2)(\lambda^2 - \mu^2) + 4lm\lambda\mu + (l^2 + m^2)(\lambda^2 + \mu^2) = 2,$$

qui se réduit à

$$(l\lambda + m\mu)^2 = 1$$

ou

$$(5) \qquad l\lambda + m\mu = \pm 1.$$

Le fait que la condition cherchée se décompose est fondamental dans cette étude.

Le point où la conique de paramètres l, m touche la conique Γ a des paramètres qui satisfont à la relation (5) et qui, de plus, sont *infinis*, puisque ce point est rejeté à l'infini. On peut donc ici remplacer la relation (5) par la suivante

$$(6) \qquad l\lambda - m\mu = 0.$$

Ainsi la tangente commune au cycle C *et au cycle de paramètres* l, m *a des paramètres infinis, satisfaisant à la relation* (6). Cette remarque sera utile tout à l'heure.

4. La relation (5) va permettre d'établir des relations remarquables qui existent entre les cycles tangents à trois cycles et les tangentes communes à ces trois cycles pris deux à deux.

Soit toujours C le cycle représenté par la conique Γ dont l'équation tangentielle est l'équation (3), et soient C_1, C_2, C_3 trois cycles tangents à C; appelons (l_1, m_1), (l_2, m_2), (l_3, m_3) leurs paramètres respectifs. On obtiendra les paramètres des tangentes communes à C_2 et à C_3 en résolvant le système

$$l_2\lambda + m_2\mu = \pm 1, \qquad l_3\lambda + m_3\mu = \pm 1.$$

Il existe pour les seconds membres quatre combinaisons de signes possibles, mais ces combinaisons donnent pour λ et μ des systèmes de valeurs opposées

deux à deux. On peut donc se borner à considérer les deux systèmes

$$l_2\lambda - m_2\mu = 1, \qquad l_3\lambda + m_3\mu = 1$$

et

$$l_2\lambda + m_2\mu = 1, \qquad l_3\lambda + m_3\mu = -1.$$

Ces deux systèmes d'équations, résolus en λ, μ, fournissent les paramètres des deux tangentes A_1 et A'_1 communes à C_2 et C_3. Les paramètres λ_1, μ_1 de la première satisfont à la relation

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{m_3 - m_2}{l_2 - l_3},$$

et ceux λ'_1, μ'_2 de la seconde, à la relation

$$\frac{\lambda'_1}{\mu'_1} = \frac{m_2 + m_3}{-(l_2 + l_3)}.$$

Il est inutile d'écrire les valeurs complètes de λ_1, μ_1, λ'_1, μ'_1.

De même les tangentes A_2 et A'_2 communes aux cycles C_3 et C_1, et les tangentes A_3 et A'_3 communes aux cycles C_1 et C_2 ont des paramètres $\lambda_2, \ldots, \mu'_3$ satisfaisant aux équations

$$\frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{m_1 - m_3}{l_3 - l_1}, \qquad \frac{\lambda'_2}{\mu'_2} = \frac{m_3 + m_1}{-(l_3 + l_1)},$$

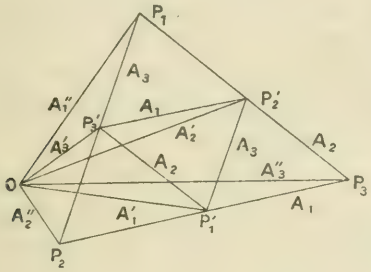
$$\frac{\lambda_3}{\mu_3} = \frac{m_2 - m_1}{l_1 - l_2}, \qquad \frac{\lambda'_3}{\mu'_3} = \frac{m_1 + m_2}{-(l_1 + l_2)}.$$

Enfin, les cycles C_1, C_2, C_3 touchent le cycle C en trois points, et les tangentes A''_1, A''_2, A''_3 en ces trois points ont des paramètres tous infinis et satisfaisant aux relations

$$\frac{\lambda''_1}{\mu''_1} = -\frac{m_1}{l_1}, \qquad \frac{\lambda''_2}{\mu''_2} = -\frac{m_2}{l_2}, \qquad \frac{\lambda''_3}{\mu''_3} = -\frac{m_3}{l_3}.$$

Il est facile de se rendre compte géométriquement des relations qui existent entre les neuf quantités $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$, $\frac{\lambda'_1}{\mu'_1}$, ..., $\frac{\lambda'_3}{\mu'_3}$. Figurons dans un plan (*fig.* 1) les points

Fig. 1.



P_1 de coordonnées $(-l_1, m_1)$, P_2 de coordonnées $(-l_2, m_2)$, P_3 de coordonnées $(-l_3, m_3)$. Soient, enfin, P'_1, P'_2, P'_3 les milieux des côtés du triangle $P_1P_2P_3$. P'_1, par exemple, a pour coordonnées

$$-\frac{l_2 - l_3}{2}, \quad \frac{m_2 - m_3}{2}.$$

Joignons les points P_1, P_2, P_3, P'_1, P'_2, P'_3 à l'origine O. On voit immédiatement que les neuf quantités $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$, ..., $\frac{\lambda''_3}{\mu''_3}$ sont les coefficients angulaires des diverses droites de la figure.

$\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ est le coefficient angulaire de P_2P_3 ou $P'_2P'_3$;

$\frac{\lambda'_1}{\mu'_1}$ » » OP'_1;

$\frac{\lambda''_1}{\mu_1}$ » » OP_1;

. . . . . .

Les rapports $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$, ..., $\frac{\lambda'_3}{\mu'_2}$ représentent, comme on l'a

vu, les directions des tangentes $A_1, \ldots, A''_3$. On a inscrit sur la figure, en regard de chaque ligne, le symbole de la tangente correspondante.

Cela posé, on sait que les côtés d'un quadrangle quelconque ont leurs coefficients angulaires en involution. Appliquons cette propriété au quadrangle $O_1 P P'_2 P'_3$. On voit *que les six semi-droites* (A''_1, A_1), (A_2, A'_3), (A_3, A'_2) *forment trois couples en involution.*

Cette proposition fournit immédiatement la solution du problème d'Apollonius.

En effet, si l'on suppose connues les tangentes communes aux trois cycles C_1, C_2, C_3, on voit que des six droites désignées plus haut, les cinq dernières sont connues. On peut donc construire la première, c'est-à-dire le point de contact avec le cycle C_1 de l'un des cycles tangents à C_1, C_2, C_3, ce qui se fait simplement en appliquant la définition de Laguerre (n° 2). On est ainsi conduit à la construction suivante :

Soient C_1, C_2, C_3 *trois cycles donnés* (*fig.* 2), A_1, A'_1, A_2, A'_2, A_3, A'_3 *les tangentes communes à ces cycles pris deux à deux. Soient* α_2, α'_2, α_3, α'_3 *les points de contact avec* C_1 *de* A_2, A'_2, A_3, A'_3. *Menons à* C_1 *la tangente parallèle à la semi-droite* A_1, *et soit* α *son point de contact. Joignons* α *au point de rencontre des droites* $\alpha_2\alpha'_3$, $\alpha_3\alpha'_2$. *La droite ainsi obtenue rencontre* C_1 *au point* β_1, *qui est le point de contact avec* C_1 *de l'un des deux cycles tangents à* C_1, C_2, C_3.

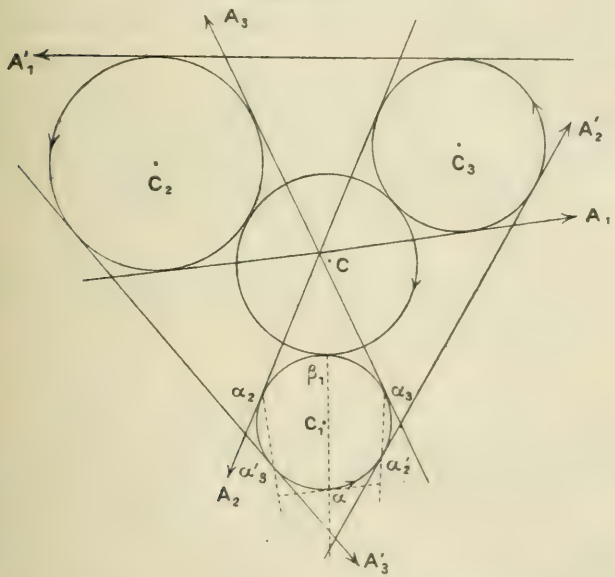
On obtiendra d'une manière analogue les points de contact de ce même cycle avec C_2 et avec C_3.

On peut répartir de huit manières différentes les six tangentes communes à C_1, C_2, C_3, en deux triangles, dont les côtés touchent respectivement C_2 et C_3, C_3 et C_1,

C_1 et C_2. Ces huit répartitions sont les suivantes :

$A_1 A_2 A_3$	et	$A'_1 A'_2 A'_3$,	$A'_1 A'_2 A'_3$	et	$A_1 A_2 A_3$,
$A_1 A'_2 A'_3$	et	$A'_1 A_2 A_3$,	$A'_1 A_2 A_3$	et	$A_1 A'_2 A'_3$,
$A'_1 A_2 A'_3$	et	$A_1 A'_2 A_3$,	$A_1 A'_2 A_3$	et	$A'_1 A_2 A'_3$,
$A'_1 A'_2 A_3$	et	$A_1 A_2 A'_3$,	$A_1 A_2 A'_3$	et	$A'_1 A'_2 A_3$.

Fig. 2 (¹).



La construction énoncée plus haut répond au premier de ces huit groupements. Il est visible que si l'on permute les rôles assignés à A_2 et A'_2, A_3 et A'_3, ce qui fait passer du premier groupement à celui qui est inscrit immédiatement au-dessous, le point β_1 obtenu dans la construction sera le même et, par suite, on sera conduit au même cycle que la première fois. La même remarque

(¹) C'est par hasard que les trois droites A_1, A_2, A_3 sont concourantes sur la figure.

s'applique aux deux autres groupements qui figurent dans la même colonne que le premier.

Ainsi : *A tout groupement des tangentes communes en deux triangles correspondent l'un des deux cycles tangents à* C_1, C_2, C_3. *Les quatre groupements qui figurent dans la première colonne du Tableau précédent correspondent au même cycle; les quatre autres groupements correspondent évidemment à l'autre cycle.*

On peut aussi ne considérer dans un groupement de tangentes en deux triangles que le *premier* de ces triangles. Nous dirons que le cycle C tangent à C_1, C_2, C_3 *correspond* à l'un quelconque des triangles

$$A_1 A_2 A_3, \qquad A_1 A'_2 A'_3, \qquad A'_1 A_2 A'_3, \qquad A'_1 A'_2 A_3.$$

L'autre cycle tangent à C_1, C_2, C_3 correspond à l'un quelconque des triangles

$$A'_1 A'_2 A'_3, \qquad A'_1 A_2 A_3, \qquad A_1 A'_2 A_3, \qquad A_1 A_2 A'_3.$$

La solution que je viens d'exposer du problème d'Apollonius me paraît, comme je l'ai dit, particulièrement simple. Elle n'est malheureusement pas applicable dans tous les cas de figure (par exemple, dans celui où deux des cycles, extérieurs l'un à l'autre, sont intérieurs au troisième).

5. La figure 1 contient d'autres quadrangles complets que ceux dont la considération a conduit à la solution du problème d'Apollonius. En premier lieu, le quadrangle $O P'_1 P'_2 P'_3$ donne immédiatement le théorème suivant :

Les tangentes communes à trois cycles pris deux à deux sont six semi-droites en involution.

En second lieu, la considération du quadrangle $OP_1P_2P_3$ montre que (A_1, A'_1), (A_2, A''_2), (A_3, A''_3) forment trois couples en involution ; ainsi :

Soient C_1, C_2, C_3 *trois cycles et* C *l'un des cycles qui leur sont tangents. Les tangentes à* C, *aux points de contact avec* C_1, C_2, C_3, *et trois tangentes communes aux cycles* C_1, C_2, C_3 *pris deux à deux, et convenablement choisies, sont six droites en involution.*

On voit que les trois tangentes communes doivent être choisies de manière à constituer l'un des quatre triangles correspondant au cycle C. Les quatre autres triangles que l'on peut former avec les tangentes communes aux cycles C_1, C_2, C_3 pris deux à deux, ont leurs côtés en involution avec les tangentes aux points de contact des cycles C_1, C_2, C_3 avec le second cycle qui les touche.

6. Je vais maintenant développer quelques conséquences des formules qui ont joué dans les recherches précédentes un rôle fondamental. En premier lieu, on a le théorème suivant :

Soient (A'_1, B_1), (A'_2, B_2), (A'_3, B_3) *trois couples de semi-droites parallèles. Les cycles inscrits dans les triangles* $A'_1A'_2A'_3$, $A'_1B_2B_3$, $B_1A'_2B_3$, $B_1B_2A'_3$ *sont tangents à un même cycle. Il en est de même des cycles inscrits dans les triangles* $B_1B_2B_3$, $B_1A'_2A'_3$, $A'_1B_2A'_3$, $A'_1A'_2B_3$.

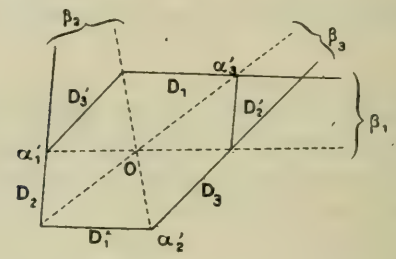
Démontrons, par exemple, la seconde partie de l'énoncé.

Soient C_1, C_2, C_3 les cycles inscrits dans les triangles $B_1A'_2A'_3$, $A'_1B_2A'_3$, $A'_1A'_2B_3$. Appelons C le

cycle tangent à C_1, C_2, C_3, et choisi de telle manière qu'il *ne corresponde pas* au triangle de tangentes communes $A'_1 A'_2 A'_3$, au sens indiqué plus haut. Toutes les notations employées au numéro précédent sont applicables.

Figurons sur le plan (*fig.* 3) les deux droites D_1 et D'_1

Fig. 3.



dont les équations respectives sont

$$l_1\lambda + m_1\mu = 1, \qquad l_1\lambda + m_1\mu = -1,$$

λ et μ étant des coordonnées courantes.

Les droites D_1 et D'_1 sont symétriques par rapport à l'origine O. Figurons les droites analogues D_2 et D'_2, D_3 et D'_3.

Les paramètres de la semi-droite A'_1 satisfont, comme on l'a vu, aux équations

$$l_2\lambda + m_2\mu = 1, \qquad l_3\lambda + m_3\mu = -1.$$

Ces paramètres sont donc les coordonnées du point α'_1 commun aux droites D_2 et D'_3. De même, les six semi-droites A'_2 et A'_3 peuvent être représentées par les points α'_2 et α'_3 de la figure.

Soient maintenant β_1, β_2, β_3 des points ayant pour coordonnées les systèmes de paramètres des semi-droites B_1, B_2, B_3. Le point β_1 doit être en ligne droite

avec le point α'_1, puisque B_1 et A'_1 sont parallèles, et situé sur l'une des droites D_1 et D'_1, puisque ses coordonnées satisfont à l'une des équations

$$l_1\lambda + m_1\mu = 1, \qquad l_1\lambda + m_1\mu = -1.$$

Les deux points satisfaisant à ces équations sont symétriques par rapport au point O. Comme ils représentent tous les deux la même semi-droite, on peut supposer que le point β_1 est sur D_1. Le point β_1 est ainsi le point commun aux droites D_1, $O\alpha'_1$. De même, β_2 est le point commun aux droites D_2, $O\alpha'_2$ et β_3, le point commun aux droites D_3, $O\alpha'_3$.

Les points β_1, β_2, β_3 sont en ligne droite : on le voit tout de suite en appliquant le théorème de Pascal à l'hexagone dont les côtés consécutifs sont $O\alpha'_1$, D_2, $O\alpha'_3$, D_1, $O\alpha'_2$, D_3 et qui est inscrit à une conique, puisqu'il a un centre.

Il existe donc des coefficients l, m, tels que l'équation

$$l\lambda + m\mu = 1$$

soit satisfaite par les coordonnées des points β_1, β_2, β_3. Cela revient à dire qu'il existe un cycle tangent aux semi-droites B_1, B_2, B_3 et au cycle C. On démontrerait de même la seconde partie de l'énoncé.

7. Trois couples de semi-droites en involution jouissent de la même propriété que trois couples de semi-droites parallèles. Autrement dit :

Soient (A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3) *trois couples de semi-droites en involution. Les cycles inscrits dans les triangles* $A_1A_2A_3$, $A_1B_2B_3$, $B_1A_2B_3$, $B_1B_2A_3$ *sont inscrits à un même cycle. Il en est de même des*

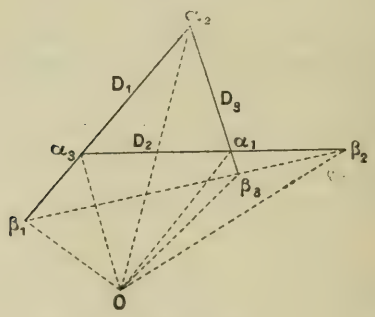
cycles inscrits dans les triangles $B_1B_2B_3$, $B_1A_2A_3$, $A_1B_2A_3$, $A_1A_2B_3$.

Démontrons cette fois la première partie de l'énoncé.

Soient C_1, C_2, C_3 les cycles inscrits dans les triangles $A_1B_2B_3$, $B_1A_2B_3$, $B_1B_2A_3$. Appelons C le cycle tangent aux cycles C_1, C_2 C_3, et qui *correspond* au triangle de tangentes communes $A_1A_2A_3$. Appliquons encore les notations des n°s 5 et 6.

Figurons sur le plan (*fig.* 4) les droites D_1, D_2, D_3

Fig. 4.



ayant pour équations respectives

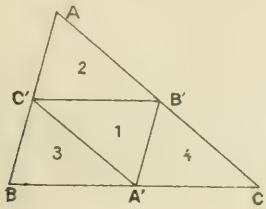
$$l_1\lambda + m_1\mu = 1, \qquad l_2\lambda + m_2\mu = 1, \qquad l_3\lambda + m_3\mu = 1.$$

Les semi-droites A_1, A_2, A_3 seront figurées respectivement par les points α_1, α_2, α_3, sommets du triangle formé par les droites D_1, D_2, D_3. Les points β_1, β_2, β_3 qui représentent les semi-droites B_1, B_2, B_3 appartiennent respectivement aux droites D_1, D_2, D_3 et doivent être tels que les droites $O\beta_1$, $O\beta_2$, $O\beta_3$ forment un faisceau en involution avec les droites $O\alpha_1$, $O\alpha_2$, $O\alpha_3$. Ces points sont donc en ligne droite, et par suite les semi-droites qu'ils représentent forment un

triangle circonscrit à un cycle qui touche les trois cycles C_1, C_2, C_3.

8. Comme application des théorèmes des n°s 6 et 7, considérons un triangle ABC (*fig.* 5), et appelons A′,

Fig. 5.



B′, C′ les milieux de ses côtés. Numérotons les quatre triangles de la figure comme il est indiqué, et désignons respectivement par O^i, O^i_a, O^i_b, O^i_c le cercle inscrit et les cercles ex-inscrits dans le triangle d'indice i (¹).

On peut, de huit manières différentes, donner des sens aux côtés du triangle ABC. En donnant les mêmes sens aux côtés parallèles du triangle A′B′C′, on peut appliquer à la figure le théorème du n° 6. Les semi-droites A_1, A_2, A_3 seront portées par les côtés du triangle ABC, et les semi-droites A'_1, A'_2, A'_3, par les côtés du triangle A′B′C′.

La première partie de l'énoncé fournit alors ce résultat : *les cercles points* A′, B′, C′ *et l'un quelconque des cercles inscrit ou ex-inscrits au triangle* ABC *sont tangents à un même cercle*. On reconnaît là le théorème de Feuerbach.

En appliquant maintenant la seconde partie de l'énoncé, et en prenant toutes les combinaisons possibles

(¹) Pour abréger les énoncés, je parlerai ici de *cercles* et non de *cycles*.

de sens pour les semi-droites de la figure, on obtient quatre combinaisons de quatre cercles tangents à un même cercle. Ce sont

$$\begin{array}{llll} O^1, & O^2, & O^3, & O^4; \\ O^1_a, & O^2_a, & O^3_c, & O^4_b; \\ O^1_b, & O^2_c, & O^3_b, & O^4_a; \\ O^1_c, & O^2_b, & O^3_a, & O^4_c. \end{array}$$

On peut maintenant appliquer le théorème n° 7, en remarquant que trois couples de semi-droites deux à deux parallèles, mais de sens opposés, forment un système en involution (on le voit immédiatement en appliquant la définition de Laguerre). La première partie de l'énoncé redonne le théorème de Feuerbach. La seconde partie, en combinant les sens de toutes les manières possibles, conduit à quatre nouvelles combinaisons de quatre cercles tangents à un même cercle. Ce sont

$$\begin{array}{llll} O^1, & O^2_a, & O^3_b, & O^4_c; \\ O^1_a, & O^2, & O^3_a, & O^4_a; \\ O^1_b, & O^2_b, & O^3, & O^4_b; \\ O^1_c, & O^2_c, & O^3_c, & O^4. \end{array}$$

J'énoncerai, pour terminer, un autre cas particulier simple du théorème du n° 7 :

Soient ABC *un triangle,* A′B′C′ *le triangle formé par les tangentes au cercle circonscrit au triangle* ABC, *aux sommets de ce triangle. Les cercles inscrits dans les triangles* ABC, A′BC, AB′C, ABC′ *sont tangents à un même cercle.*

CORRESPONDANCE.

M. **G. Fontené**. — Les faits signalés dans la Note de M. W. Gallatly (*Nouvelles Annales*, 1907, p. 402) ne sont pas nouveaux. Ce qui est relatif aux points de Feuerbach combinés entre eux se trouve dans un article inséré aux *Nouvelles Annales*, 1905, p. 533. Ce qui concerne la parabole qui a P pour foyer et O1 pour directrice a été signalé dans le *Bulletin de Mathématiques élémentaires*, en mai 1907, comme cas particulier de théorèmes généraux sur le cercle pédal qui doivent paraître dans les *Nouvelles Annales*.

M. **E. Lacour**. — A propos des formules relatives à l'icosaèdre régulier [1], voici quelques indications pratiques relatives à la construction de ce solide.

Dans du papier un peu fort, on découpe un hexagone régulier; les rayons des sommets déterminant six triangles équilatéraux, on enlève l'un de ces triangles; avec les cinq triangles restants, comme faces, il est facile de construire une pyramide régulière à base pentagonale. Mais ceci ne donnerait que cinq faces de l'icosaèdre. On obtient dix faces tenant ensemble, en modifiant la construction de la façon suivante.

Avant de découper le contour, on construit, pour chacun des cinq triangles équilatéraux qu'on veut conserver, le symétrique de ce triangle par rapport au côté correspondant de l'hexagone. On obtient ainsi une pyramide régulière à base pentagonale dont chaque face est prolongée par un triangle équilatéral; on plie la feuille suivant chacun des côtés du pentagone de base, de façon que les plans des deux triangles fassent un angle égal à l'un des dièdres de l'angle polyèdre à cinq faces déjà construit.

On a ainsi une moitié de la surface de l'icosaèdre. La seconde moitié se construit de même et il n'y a plus qu'à rapprocher

[1] *Voir* la question proposée 2081.

les deux moitiés en entrecroisant les triangles qui avaient deux côtés libres, et à coller des bandes de papier gommé le long des dix arêtes le long desquelles les deux contours partiels sont venus coïncider l'un avec l'autre.

BIBLIOGRAPHIE.

Leçons sur les théories générales de l'analyse, par *René Baire*. — Tome I : Principes fondamentaux, variables réelles. 1 volume grand in-8, de x-232 pages, avec 17 figures. Paris, Gauthier-Villars, 1907. Prix : 8fr.

Un enseignement de l'Analyse peut et doit être conçu à divers points de vue, suivant le public auquel il est destiné. Les débutants et ceux qui étudient les Mathématiques en vue de leurs applications à la Mécanique, à la Physique, ou à l'Art de l'Ingénieur, demandent qu'on les mette le plus rapidement possible en possession d'un puissant instrument de recherches. Un certain manque de rigueur, de fréquents appels à l'intuition sont alors parfaitement justifiés, et l'on risquerait assurément de jeter le trouble dans bien des esprits neufs en examinant de trop près des notions telles que celles de limite et de continuité. Il faut seulement que le manque de rigueur soit nettement signalé, quand il se manifeste, et que les appels à l'intuition ne soient pas déguisés. M. J. Tannery professe à juste titre son éloignement pour un enseignement « qui n'est pas toujours sincère ».

C'est de cette manière large qu'est compris l'excellent enseignement donné depuis quelques années dans nos classes de Mathématiques spéciales, et qui semble avoir atteint sa forme à peu près définitive. Mais quelle qu'en soit la haute valeur pratique, il ne peut suffire à ceux qui veulent se consacrer à la Science pure. Ceux-là, pour devenir des mathématiciens dignes de ce nom, doivent non seulement étendre,

mais approfondir leurs études. Ayant acquis une première vue d'ensemble, il leur faut revenir sur les principes, et asseoir leurs connaissances sur une base inébranlable.

Les belles et originales *Leçons* que vient de publier M. Baire sont écrites à ce dernier point de vue : elles s'adressent à ceux qui exigent du raisonnement pur tout ce qu'il peut donner. C'est dire que le souci de la rigueur y est extrême. Mais l'Ouvrage possède un autre caractère, que M. Baire réclame à juste titre : c'est celui de la simplicité. Non pas cette simplicité apparente obtenue en masquant toutes les difficultés, mais celle qui résulte des vues profondes sur l'ordonnance des faits mathématiques et leur développement harmonieux. Jointe à une rédaction très soignée et à une lucidité remarquable dans l'exposition des démonstrations les plus ardues, cette qualité rend la lecture du Livre facile, aussi facile du moins que le comporte l'abstraction du sujet.

Le premier Chapitre est consacré aux notions fondamentales. Les nombres irrationnels sont définis au moyen de la coupure, mais au lieu de poursuivre comme on le fait généralement l'emploi de cette notion pour étendre aux nombres irrationnels les opérations de l'Arithmétique, l'auteur introduit tout de suite celles de *borne supérieure* et de *borne inférieure* d'un ensemble. On peut alors définir simplement la différence de deux nombres irrationnels, et aborder la théorie des limites. Ce mode d'exposition, propre à M. Baire, avait déjà été adopté par lui dans sa *Théorie des nombres irrationnels, des Limites et de la continuité* (1), dont il a été rendu compte ici même (2). On aborde ensuite les notions de fonction et de continuité, et un nouveau principe, dit *principe d'extension*, permet de définir, dans les conditions les plus générales, une fonction (uniformément) continue, quand on la suppose définie pour les valeurs rationnelles de l'argument. On peut alors démontrer que *si deux fonctions, d'arguments quelconques, sont continues et égales pour tout point rationnel, elles sont encore égales pour un point quelconque*. Ce théorème légitime d'un coup d'extension aux nombres quelconques des règles ordinaires de calcul algé-

(1) Paris, Nony, 1905.

(2) *Nouvelles Annales*, 1905, p. 178.

brique. On se rend compte de l'économie ainsi réalisée, par rapport aux procédés ordinaires d'exposition.

Le Paragraphe suivant, consacré aux grandeurs concrètes, est très important. Dans la plupart des Ouvrages où la doctrine des nombres irrationnels est exposée au point de vue purement arithmétique, on applique sans explication suffisante à la mesure des grandeurs des quantités qui, jusque-là, ne sont apparues que comme de purs symboles. En quelques pages substantielles, M. Baire montre grâce à quels axiomes (*axiome d'Archimède, axiome de continuité*) les nombres irrationnels précédemment définis peuvent servir à la mesure des grandeurs concrètes, et en particulier, comment l'Analyse se relie à la Géométrie.

Viennent ensuite les propositions fondamentales de la théorie des fonctions continues (*une fonction continue est uniformément continue, une fonction continue dans un domaine est bornée supérieurement et inférieurement et atteint chacune de ses bornes, une fonction continue ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires*); puis l'étude des fonctions particulièrement importantes pour la suite $\sqrt[m]{x}$, x^y, etc. Les éléments de la théorie des séries et la définition du nombre e terminent le premier Chapitre.

Le Chapitre II concerne les dérivées et les intégrales de fonctions de variables réelles. Après un exposé rapide de la théorie des dérivées et des différentielles premières, on arrive à la notion d'intégrale définie. Les principes développés dans le premier Chapitre permettent une démonstration rapide et générale de la proposition fondamentale : *Toute fonction continue admet une intégrale,* sans l'obligation d'examiner successivement des hypothèses particulières. Puis on passe en revue les procédés élémentaires d'intégration. On pourrait reprocher ici à l'auteur une concision extrême, s'il ne s'adressait, comme je l'ai dit, à des lecteurs qu'il faut supposer déjà rompus à la pratique de l'Analyse par une étude préalable.

La notion d'intégrale définie peut souvent être étendue aux cas où les limites ou bien l'élément différentiel deviennent infinis. Ces cas sont examinés. La règle de dérivation sous le signe $\int$ est établie. Puis vient l'étude des fonctions implicites, des déterminants fonctionnels, des dérivées et différen-

tielles d'ordre supérieur, des changements de variables, des différentielles totales. Je ne puis tout signaler, mais il est impossible de passer sous silence la définition remarquablement claire et simple, adoptée pour les différentielles d'ordre supérieur.

Le Chapitre III, consacré à l'évaluation des longueurs d'arcs, des aires et des volumes, et aux intégrales doubles et triples, me paraît un véritable chef-d'œuvre. Nulle part on ne peut mieux constater cette union de la profondeur à la simplicité qui distinguent le Livre de M. Baire. Et cette simplicité tient sans doute à ce que le raisonnement se laisse toujours guider par l'intuition géométrique, et n'intervient que pour la purifier. Voici, par exemple, en quelques mots, comment s'y prend l'auteur pour définir l'aire d'un *domaine plan borné* (un tel domaine ayant été défini au Chapitre I). On suppose connue par la géométrie élémentaire l'aire d'un domaine *polygonal*, c'est-à-dire dont la frontière est constituée par des lignes droites. Si maintenant D est un domaine plan quelconque, on appelle *aire de* D *un nombre plus grand que l'aire de tout domaine polygonal contenu dans* D *et plus petit que l'aire de tout domaine polygonal contenant* D, *ceci dans l'hypothèse où il existe un et un seul nombre possédant ces propriétés*. Cela posé, une démonstration très élégante conduit au théorème suivant : *Pour que le domaine* D *ait une aire, il est nécessaire et suffisant que sa frontière puisse être enfermée dans un domaine polygonal d'aire aussi petite que l'on veut.* Il est ensuite bien facile d'obtenir la formule classique qui ramène l'évaluation d'une aire au calcul d'une intégrale définie. Des raisonnements analogues sont appliqués plus loin à l'étude des volumes.

Une question plus délicate est la définition de l'aire d'une portion de surface.

La place me fait malheureusement défaut pour donner une idée de la méthode par laquelle M. Baire parvient à triompher des difficultés considérables que présente cette partie de la théorie.

On trouve enfin dans les pages consacrées aux intégrales doubles, triples et curvilignes, les mêmes qualités d'exposition et la même abondance de vues personnelles que dans le reste de l'Ouvrage.

Tel est ce livre où tout est matière à méditation. Souhai-

tons que l'auteur nous donne bientôt le second Volume, qui doit traiter des fonctions analytiques, des équations différentielles, des applications géométriques de l'Analyse, et des fonctions elliptiques. R. B.

CALCUL GRAPHIQUE ET NOMOGRAPHIE, par *M. d'Ocagne*. — 1 vol. in-18 jésus, de XXVI-392 pages, avec 146 figures dans le texte. Paris, Octave Doin, 1908. Prix : 5fr.

Tout problème de Mathématiques appliquées à la pratique aboutit au calcul numérique de certaines inconnues. Un tel calcul peut toujours être effectué par l'emploi des procédés exacts ou approximatifs qu'enseignent l'Arithmétique et l'Algèbre. Mais le travail est souvent long et fastidieux. Aussi a-t-on cherché depuis longtemps à substituer aux calculs numériques des opérations mécaniques ou graphiques conduisant plus rapidement au but et avec une moindre fatigue. Les procédés mécaniques sont les plus anciens, comme en témoignent la règle à calcul et les machines arithmétiques, dont l'idée première remonte au XVIIe siècle. Les premiers essais de calcul graphique ne datent guère que d'une centaine d'années.

L'application des procédés graphiques au calcul peut être conçue de deux manières différentes. On peut en premier lieu traduire les diverses opérations numériques par des constructions géométriques, effectuées avec la règle et le compas, et tout calcul exige alors un tracé spécial. Cette méthode semble de rigueur dans certains cas, où les données indépendantes sont très nombreuses, par exemple quand on veut résoudre un système de plusieurs équations linéaires à plusieurs inconnues. Mais on a le plus souvent affaire dans la pratique à une relation entre un petit nombre de variables, et le problème à résoudre consiste à calculer une de ces quantités, étant données les valeurs numériques de toutes les autres. Il est alors très avantageux de représenter cette relation par une épure dessinée une fois pour toutes, sur laquelle la lecture de la valeur cherchée se fait pour ainsi dire instantané-

ment. Une telle épure a reçu le nom d'*abaque* ou de *nomogramme*.

Les premiers abaques paraissent être ceux de Pouchet (1795). La théorie et l'emploi de ces Tables graphiques ont été successivement étendus par Lalanne et par MM. Massau, d'Ocagne et Lallemand. Mais il était réservé à M. d'Ocagne de découvrir les principes généraux de la théorie des abaques, de la développer considérablement en y introduisant l'idée féconde de la dualité, et de l'édifier, sous le nom de *Nomographie*, en corps important de doctrine.

Le calcul graphique et les abaques ne font, bien entendu, connaître les résultats qu'entachés d'une certaine erreur. Mais l'approximation obtenue suffit largement aux besoins de la pratique, au moins dans l'art de l'ingénieur, où leur emploi est le plus fréquent. Et ici se manifeste une nouvelle supériorité de ces procédés sur ceux de l'Arithmétique. On sait que la pratique des opérations numériques approximatives est assez délicate. Combien de chiffres significatifs doit-on conserver dans les nombres soumis à ces opérations, en vue d'une approximation fixée à l'avance? Combien de chiffres doit-on conserver dans les divers produits ou quotients intermédiaires? Les réponses à ces questions ne sont pas toujours immédiates et, bien souvent, par crainte de rester en deçà du but, le calculateur utilise trop de chiffres et allonge inutilement son travail. Au contraire, dans le calcul graphique, la théorie des erreurs relatives s'applique, pour ainsi dire, automatiquement et, sans avoir besoin d'y réfléchir, l'opérateur obtient l'approximation qui est dans la nature des choses.

Le livre de M. d'Ocagne, qui fait partie de l'*Encyclopédie scientifique*, publiée sous la direction du Dr Toulouse [1], est le développement du cours libre de Calcul graphique et de Nomographie, qu'il a professé à la Sorbonne en 1907. Je vais tâcher d'en donner un résumé aussi fidèle que possible.

L'Introduction contient un exposé rapide des notions essentielles de Géométrie analytique qui seront utilisées dans la suite. L'auteur insiste sur les *coordonnées tangentielles* et

---

[1] Cette *Encyclopédie* est divisée en quarante Bibliothèques pourvues chacune d'un directeur spécial. Les Bibliothèques de *Mathématiques appliquées* et de *Mécanique appliquée et Génie* sont confiées à M. d'Ocagne lui-même.

surtout sur les *coordonnées parallèles*, dont l'emploi est très fréquent en Nomographie.

Le Livre I est consacré au *Calcul graphique* proprement dit. Il débute par des indications sur l'emploi des *échelles métriques* et des *verniers graphiques*. On étudie ensuite les constructions géométriques qui traduisent les opérations de l'Arithmétique élémentaire. Il faut signaler particulièrement un procédé très simple de détermination des termes successifs d'une série récurrente. De telles séries se présentent, par exemple, dans la résistance des matériaux.

Deux méthodes, dont la principale est due à M. Massau, sont indiquées pour la résolution graphique des systèmes d'équations linéaires à plusieurs inconnues, question à laquelle M. Farid-Boulad a apporté tout récemment ici même une intéressante contribution.

La résolution des équations algébriques de degrés quelconques fait intervenir la représentation des polynomes par les figures dites *orthogones*. La méthode, due à Lill, comporte naturellement un tâtonnement quand le degré de l'équation proposée dépasse le second.

Pour l'interprétation de certaines observations physiques, il est utile de construire la courbe représentative d'un polynome. A cet effet, M. d'Ocagne fait une application ingénieuse de la *transformation par l'abscisse*, qui s'exprime par les formules $X = x$, $Y = xy$. On peut aussi, avec M. Mehmke, introduire l'*image logarithmique d'une fonction*, c'est-à-dire représenter la fonction $f(z)$ par le point de coordonnées $\log(z)$, $\log f(z)$. Cette représentation se fait assez rapidement, soit en utilisant une certaine courbe transcendante tracée une fois pour toutes, soit en se servant du *compas à trois branches* de M. Brauer.

Le problème de l'intégration graphique consiste, étant donnée la courbe $y = f(x)$, à construire la courbe

$$Y = \int_a^x f(x)\,dx,$$

dite *courbe intégrale* de la première. Le procédé le plus rapide repose sur l'emploi de l'*intégraphe* Abdank-Abakanowicz. Mais, comme cet appareil est assez peu répandu, il est utile d'avoir une méthode graphique. Une telle méthode a été ima-

ginée par M. Massau et donne de bons résultats. Le cas où la courbe est une parabole de degré quelconque donne lieu à des tracés spéciaux, où intervient la considération des *polygones intégrants*.

Pour la rectification approchée des cercles, M. d'Ocagne reproduit la construction très pratique qu'il a fait connaître dans ce Journal (1907, p. 1).

Le calcul graphique permet enfin la construction approchée des courbes définies par une équation différentielle du premier ordre, au sujet de laquelle l'auteur signale une ingénieuse traduction graphique, due à M. Runge, de la méthode d'approximations successives de M. Émile Picard.

Au second Livre, nous entrons dans la *Nomographie*. Après quelques préliminaires, on étudie les *abaques cartésiens*, c'est-à-dire la représentation de la relation $f(z_1, z_2, z_3) = 0$ par le réseau des courbes en z_1, z_2, obtenues en donnant à z_3 une série de valeurs constantes. Le principe de l'*anamorphose*, découvert dans un cas particulier par Lalanne, puis étudié dans toute son étendue par MM. Massau et d'Ocagne, conduit aux *abaques à lignes concourantes* les plus généraux, dans lesquels rentrent les abaques cartésiens. Plus spécialement, on obtient des abaques constitués uniquement par des réseaux de lignes droites, dans le cas très fréquent où la relation entre les trois variables peut être mise sous la forme

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} f_1(z_1) & g_1(z_1) & h_1(z_1) \\ f_2(z_2) & g_2(z_2) & h_2(z_2) \\ f_3(z_3) & g_3(z_3) & h_3(z_3) \end{vmatrix} = 0.$$

La relation de la forme plus particulière, et pourtant souvent rencontrée,

$$f_1(z_1) + f_2(z_2) + f_3(z_3) = 0$$

se prête à la représentation par *abaque hexagonal* (M. Lallemand), avec transparent à trois index.

Les procédés employés jusqu'ici permettent quelquefois la figuration d'une relation entre plus de trois variables.

Les abaques hexagonaux sont les plus avantageux de ceux auxquels conduit le principe des lignes concourantes. Mais ils laissent encore subsister certains inconvénients que M. d'Ocagne a fait disparaître dans ses *abaques à points alignés*

(dont l'invention est d'ailleurs un peu antérieure à celle des abaques hexagonaux). Considérons la relation (1) comme exprimant, non plus que trois droites sont concourantes, mais que trois points sont en ligne droite. Le nomogramme correspondant sera simplement constitué par trois courbes portant chacune une graduation, et pour s'en servir on n'aura qu'à aligner au moyen d'un fil tendu trois points appartenant respectivement à ces courbes ou *échelles*. Le principe imaginé par M. d'Ocagne est certainement le plus important qui ait été introduit en Nomographie, et il a donné à cette science un essor considérable. Il se prête mieux que tout autre à la représentation des relations entre plus de trois variables.

Un cas particulier important est celui où les trois échelles sont rectilignes et, à cause des facilités de construction qui en résultent, il y a un grand intérêt à reconnaître si une relation donnée est susceptible d'une telle représentation. Le problème donne lieu à une élégante étude géométrique, dans laquelle M. d'Ocagne retrouve, par la considération de ce qu'il appelle les *points critiques*, les résultats qu'il avait obtenus antérieurement d'une manière toute différente et purement algébrique.

Les nomogrammes où figurent une ou plusieurs échelles curvilignes s'appliquent naturellement à des cas plus étendus. L'auteur indique, en particulier, qu'il est possible de construire des abaques permettant de résoudre les équations algébriques jusqu'au septième degré inclusivement, ce qui est une contribution fort intéressante à une question soulevée par M. Hilbert. Il faut encore citer les nomogrammes à *échelles coniques* ou *circulaires* de M. Clark et les recherches ingénieuses de MM. Soreau, Batailler, etc.

Plusieurs relations entre plus de trois variables peuvent être représentées par des nomogrammes *à alignements multiples* ou *à alignements parallèles*, dont l'emploi est presque aussi simple que celui des nomogrammes à alignement unique. M. d'Ocagne montre, d'après M. Soreau, que ce nouveau développement de la théorie peut être rattaché à des considérations de géométrie dans l'espace.

Dans un nomogramme à alignement la relation à figurer est traduite par le fait que certains points doivent être en ligne droite. On peut généraliser le principe en remplaçant cette condition par une autre relation géométrique, qui peut être

a priori de forme quelconque. Les dispositions les plus intéressantes pratiquement sont celles des nomogrammes *à équerre, à équerre par le sommet, à points équidistants.* On peut enfin avoir des *échelles mobiles*, et le type de nomogramme correspondant comprend la règle à calcul comme cas très particulier.

L'Ouvrage se termine par des considérations d'un ordre très général sur la théorie des abaques. *Toute représentation nomographique, avec éléments mobiles, revient à réaliser quatre contacts simultanés*, en donnant au mot *contact* un sens suffisamment étendu. Ce principe est le point de départ d'une classification qui embrasse tous les nomogrammes connus et tous ceux qui pourront être proposés.

Le Traité de *Calcul graphique et de Nomographie*, rédigé à un point de vue vraiment didactique, avec le soin et l'élégance qui caractérisent les productions de M. d'Ocagne, intéressera de nombreux lecteurs. Les théoriciens seront attirés par les problèmes analytiques et géométriques qui se présentent en foule, dont certains, d'une haute difficulté, attendent encore leur solution (par exemple : *Reconnaître dans le cas général si une relation donnée entre trois variables est réductible à la forme canonique représentable par un nomogramme à points alignés*) [1]. Et le livre sera bien vu des praticiens, parce que tous ces problèmes se posent naturellement et que la résolution de chacun d'eux se traduit immédiatement par un profit industriel, si l'on peut dire. Par l'heureux équilibre réalisé entre la spéculation et le sentiment de l'utile, M. d'Ocagne montre excellemment ce que doit et ce que peut être un ouvrage de Mathématiques appliquées.

R. B.

---

[1] Il convient d'ajouter que l'immense majorité des relations rencontrées dans la pratique s'offrent de prime abord sous forme d'équations d'ordre nomographique 3 ou 4 pour lesquelles la solution complète a été donnée par MM. d'Ocagne et Clark.

Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques, par M. *Édouard-A. Fouët*. 2e édition, entièrement refondue. Tome I : Les fonctions en général. 1 vol. in-8 de XIII-112 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1907. Prix : 3fr.50.

Dans cette deuxième édition de ses intéressantes *Leçons*, l'auteur a mis à contribution les recherches les plus récentes sur la Théorie des Fonctions. On sait quelle place d'honneur occupe cette doctrine dans les travaux des géomètres contemporains. Les personnes curieuses de s'y initier, qui n'ont pas le loisir d'aborder les Mémoires originaux, ou qui craignent de s'y perdre, liront avec le plus grand profit le résumé clair et substantiel de M. Fouët. Les démonstrations ne figurent pas toutes, et l'exposé est parfois forcément un peu sommaire. Mais de nombreuses notes renvoient aux sources le lecteur désireux de compléter sur certains points les indications du texte.

Le volume qui vient de paraître comprend deux Chapitres, intitulés : *les Fonctions en général*, et *les Fonctions analytiques*. Le premier Chapitre est consacré à l'examen des notions de *nombre*, de *fonction* et de *limite*. Vient ensuite un aperçu de la *Théorie des ensembles*, considérée surtout dans ses parties actuellement applicables à l'Analyse, puis une étude de la *Classification des fonctions*. Le second Chapitre concerne les *Fonctions continues*, les *Fonctions analytiques en un point*, les *Fonctions analytiques dans un domaine*. R. B.

Exercices de Géométrie comprenant l'*Exposé des méthodes géométriques et* 2000 *questions résolues*, par *F. G.-M.* — 4e édition, 1907. Tours et Paris, Mame et Poussielgue.

Les *Nouvelles Annales* ont rendu compte des éditions précédentes (1883, p. 516; 1896, p. 246). L'*Intermédiaire des Mathématiciens* a cité cet Ouvrage à diverses reprises, notamment en 1907, page 142. Il nous suffira donc de dire que

la *quatrième édition* présente les améliorations suivantes : les renseignements bibliographiques ont été notablement augmentés, grâce surtout à l'*Intermédiaire des Mathématiciens* et à divers autres périodiques [1]. Ces mêmes Ouvrages et des recherches personnelles ont fourni, en outre, des questions nouvelles en assez grand nombre.

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

Caen.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Déterminer les constantes p, q de manière que la fonction $(x^2+px+q)e^{-x}$ admette une fonction primitive $F(x)$ s'annulant pour x infini et ayant 1 pour racine double.*

Construire la courbe $y = F(x)$: points d'inflexion.

Dire si la série dont le terme général u_n est égal à $-F(n)$ est convergente.

$$\left(\text{On trouve } p = 4,\ q = 3,\ \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e}.\right)$$

II. *Un point* M, *de masse* 1, *est assujetti à glisser sans frottement sur la cardioïde*

$$r = a(1+\cos\theta);$$

il est attiré vers le pôle par une force égale à $\frac{3a^5}{r^4}$; à l'instant initial, il est sur l'axe polaire, au sommet de la cardioïde, avec une vitesse $\frac{a}{2}$. Loi du mouvement du point M : *pression sur la cardioïde.*

---

[1] Nous devons signaler une petite erreur de date à la page 23. C'est en 1896 (et non en 1901) que MM. Laisant et Antomari prirent la direction des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

(L'intégrale des forces vives donne

$$v^2 = 4a^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}\theta \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2a^5}{r^3} = \frac{a^2}{4\cos^6 \tfrac{1}{2}\theta};$$

la pression sur la courbe est nulle.)

(Novembre 1907.)

Lille.

I. — ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

1. *Ox, Oy étant deux axes de coordonnées rectangulaires dans un plan, construire la courbe* (Γ) *représentée par l'équation*

$$xy^2 = 4a^2(2a - x).$$

2. M *désignant un point qui se déplace sur la courbe* (Γ), *étudier la variation de l'aire du rectangle* (R) *dont les côtés sont parallèles aux axes Ox, Oy et dont* O *et* M *sont deux sommets opposés.*

3. *Calculer l'aire de la surface plane* (S) *limitée par Ox, Oy, la courbe* (Γ) *et la parallèle à Ox menée par* M; *calculer également le volume qu'elle engendre en tournant autour de Oy.*

4. *Exprimer la longueur de la sous-tangente correspondant à un point* M *en fonction des coordonnées de ce point; montrer que cette longueur varie proportionnellement au carré de l'aire de* (R); *former et intégrer l'équation différentielle des courbes jouissant de cette dernière propriété.*

5. *Calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe Oy de la surface* (S) *supposée recouverte d'une couche infiniment mince d'une matière pesante et homogène.*

II. — MÉCANIQUE.

1. *Travail des forces appliquées à un point matériel. On étudiera seulement les questions suivantes :*

1° *Expression analytique du travail élémentaire;*

2° *Travail pour un déplacement fini dans un champ où il existe une fonction de force;*

3° *Propriétés des surfaces de niveau.*

2. *Un point matériel pesant est assujetti à se mouvoir sans frottement sur une hélice à axe vertical; ce point est attiré par un point fixe* O *de l'axe de l'hélice proportionnellement à sa distance à ce point :*

1° *Trouver la position d'équilibre* A *du point* M *sur l'hélice eu égard à son poids* p *et à la force attractive* F *exercée sur lui par le point* O ;

2° *En supposant qu'on abandonne le point considéré à lui-même, sans vitesse initiale, dans une position déterminée* M_0, *trouver sa vitesse dans une position quelconque* M *en fonction de l'arc* AM. (Novembre 1907.)

Toulouse.

Épreuve écrite. — I. *Un cylindre homogène de rayon* R *est mobile autour de son axe supposé fixe et horizontal. On désigne par* A *le moment d'inertie du cylindre par rapport à son axe. Un fil de masse négligeable, fixé au cylindre par une de ses extrémités, est enroulé un grand nombre de fois autour du cylindre. Son autre extrémité pend librement et porte un poids* P. *Des ailettes de masse négligeable, fixées au cylindre, éprouvent de la part de l'air une résistance qui se traduit par un couple dont l'axe, dirigé suivant l'axe du cylindre, est proportionnel à la vitesse angulaire du cylindre.*

Trouver le mouvement du système partant du repos. Que devient ce mouvement au bout d'un temps suffisamment long?

II. *Soit la courbe* C *définie en coordonnées rectangulaires par les équations*

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t, \qquad z = au,$$

où t *est un paramètre variable et* u *une fonction donnée de ce paramètre :*

1° *Écrire les équations de la tangente et l'équation du plan osculateur en un point de la courbe* C.

2° *Soit* A *le point où cette tangente coupe le plan des* xy. *Déterminer la fonction* u *de façon que le point* A *décrive une circonférence ayant pour centre l'origine. Soit* C_1 *la courbe qui correspond à ce choix de la fonction* u *et qui passe par le point* $x = a$, $y = 0$, $z = a$.

Construire la projection de C_1 *sur le plan des* zx.

3° *Rectifier la courbe* C_1.

4° u *étant de nouveau une fonction quelconque de* t *comme dans la première partie, déterminer cette fonction de façon que le plan osculateur fasse un angle constant avec l'axe des* z.

Épreuve pratique. — *Trouver avec trois chiffres significatifs les deux racines réelles de l'équation*

$$x^2 - 10 \log x - 3 = 0,$$

où $\log x$ *désigne le logarithme dans la base* 10 *de* x.

(Juillet 1907.)

Épreuve écrite. — I. *Soit une plaque rectangulaire, pesante,* non homogène, *dont les côtés ont pour longueurs* a *et* b.

On la fait osciller successivement autour de chacun des quatre côtés rendu horizontal, et l'on mesure chaque fois la durée des petites oscillations. Soient T_1, T_2, T_3, T_4 *ces quatre durées.*

En supposant connue l'intensité g *de la pesanteur, déduire des données précédentes le centre de gravité de la plaque.*

II. *Soit la droite représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$x \sin t - y \cos t = u,$$

où t *est un paramètre variable et* u *une fonction de ce paramètre :*

1° *Calculer les coordonnées du point* M *où la droite touche son enveloppe ; calculer le rayon de courbure de l'enveloppe au point* M ; *indiquer la signification géométrique des quantités* t, u *et* $\frac{du}{dt}$.

2° *Quelle doit être la fonction u pour que le rayon de courbure ρ soit une fonction linéaire $as + b$ de l'arc s de la courbe? Montrer que l'expression trouvée pour u peut se simplifier par un choix convenable de l'origine des coordonnées.*

III. *Construire les courbes représentées en coordonnées rectangulaires par l'équation différentielle*

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{(y+3)(1-y^2)}}.$$

(Novembre 1907.)

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Besançon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Considérant la surface ayant pour équation en coordonnées rectangulaires*

$$z = y \sin x.$$

1° *Déterminer les lignes asymptotiques γ (autres que les génératrices rectilignes) et montrer qu'elles coupent orthogonalement la génératrice* Oy.

2° *Trouver les trajectoires orthogonales des courbes γ.*

3° *En un point* M *de* Oy *passe une courbe γ. Déterminer le centre de courbure, le rayon de courbure* R *et la droite polaire* Δ *de γ au point* M.

4° *Variation de* R *quand* M *décrit* Oy.

5° *Lignes asymptotiques de la surface décrite par* Δ *quand* M *décrit* Oy.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale double*

$$\int\int \frac{dx\,dy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

étendue à l'aire du triangle limité par les trois droites

$$x = 1,$$
$$y = 0,$$
$$x - y - a = 0$$
$$(0 < a < 1).$$

Valeur limite pour $a = 0$. (Juin 1907.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Intégration des équations différentielles linéaires et homogènes à coefficients constants.*

II. *Déterminer une surface* S *vérifiant l'équation aux dérivées partielles*

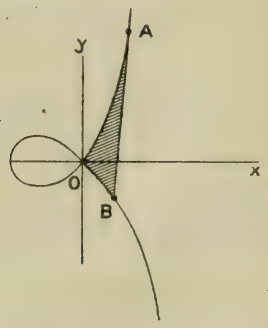
$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

et passant par la courbe

$$x = y,$$
$$z = x^3.$$

Chercher les lignes asymptotiques de cette surface.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère la courbe unicursale*



$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \qquad y = \frac{t(1 - t^2)}{1 + t^2},$$

et, sur elle, deux points A *et* B *correspondant aux*

$$t_1 = \operatorname{tang}\alpha, \qquad t_2 = \operatorname{tang}\beta,$$

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < -\frac{\pi}{4}, \qquad \frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Déterminer l'aire du triangle curviligne AOB.

(Novembre 1907.)

Dijon.

Première question. — *On considère, en coordonnées rectangulaires, le cylindre d'équation* $y = x^n$, *où* n *est une constante donnée. Trouver une courbe située sur ce cylindre, et telle que le plan osculateur en chaque point* M *de cette courbe passe par la projection orthogonale* P *de* M *sur l'axe* Oy.

C *étant une courbe possédant cette propriété, on considère la surface engendrée par la droite* MP *quand* M *décrit* C. *Trouver les lignes asymptotiques de cette surface.*

Deuxième question. — *Intégrer l'équation*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)(y^2 - x^2) + 1 = 0,$$

où $P(x)$ *est une fonction donnée de* x.

Chercher quelles conditions doit remplir P *pour que l'équation n'admette en* y *que des solutions qui soient fonctions rationnelles de* x. (Juillet 1907.)

I. *Exposer la théorie des lignes géodésiques d'une surface, en se bornant à la définition de ces lignes par la propriété du plan osculateur, et laissant de côté ce qui concerne les questions de minimum de distance.*

II. *Former l'équation différentielle de lignes géodésiques et l'hélicoïde engendré par une droite qui rencontre constamment une hélice circulaire donnée ainsi que son axe, et qui reste perpendiculaire à cet axe.*

Montrer qu'on peut intégrer cette équation par les fonctions elliptiques. (Novembre 1907.)

Grenoble.

Composition. — *Une surface* S *est définie par les équations*

$$(1) \qquad x = -\frac{1}{u'_\alpha}, \qquad y = \beta x, \qquad z = \alpha + ux,$$

dans lesquelles u est une fonction donnée des deux paramètres arbitraires α, β. *On demande :* 1° *les équations du plan tangent et de la normale en un point de* S; 2° *l'équation différentielle des lignes asymptotiques de cette surface.*

On remarquera : 3° *que les courbes coordonnées*

$$\alpha = \text{const.}, \qquad \beta = \text{const.}$$

sont conjuguées, et l'on montrera : 4° *que la développable circonscrite à* S, *le long d'une courbe* $\alpha = \text{const.}$, *est un cône dont le sommet est sur* Oz; *et* 5° *que dans le cas où la fonction u est donnée de la forme* $u = AB + \alpha B_1 + B_2$, A *ne dépendant que de* α, *et* B, B_1, B_2 *seulement de* β, *la développable circonscrite à une courbe* $\beta = \text{const.}$ *est aussi un cône.*

Enfin 6° *on fera voir que, dans le cas où les fonctions* B_1 *et* B_2 *sont linéaires, la détermination des lignes asymptotiques ne dépend que de simples quadratures.*

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation*

$$(px + qy - z)^2 (x^2 + y^2) - 2(px + qy - z) - p^2 - q^2 = 0.$$

(Novembre 1907.)

Nancy.

Épreuve écrite. — I. *On considère la fonction* $f(u)$, *où l'on a posé, pour abréger,* $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; *on demande :*

1° *De calculer en fonction de u l'expression*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2};$$

2° *D'évaluer l'intégrale triple*

$$\int\int\int\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz$$

étendue au volume compris entre deux sphères ayant pour centre l'origine et pour rayons a et b;

3° *De déterminer la fonction $f(u)$ de façon qu'elle satisfasse à l'équation*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+\frac{1}{4}\,\frac{f(\sqrt{x^2+y^2-z^2})}{x^2-y^2+z^2}=0.$$

II. *Définition et détermination du plan osculateur.*

III. *Par chaque point* M *de la courbe représentée par les équations*

$$x=t,\qquad y=t^2,\qquad z=t^3,$$

on trace la droite D *parallèle au plan* xOy *et rencontrant l'axe* Oz. *Montrer que cette droite est contenue dans le plan osculateur de la courbe au point* M. *Déterminer les lignes asymptotiques de la surface lieu de la droite* D.

(Octobre 1907.)

QUESTIONS.

2084. Étant donnés un tétraèdre orthocentrique ABCD et un point M de la sphère circonscrite, les parallèles à MA, MB, MC, MD menées par l'orthocentre H rencontrent les plans des faces correspondantes en quatre points situés dans un même plan, et ce plan partage le segment MH dans le rapport de 2 à 1 [1]. (G. Fontené.)

---

[1] Cette question est l'extension à l'espace de la question 2046, posée par M. Sondat et résolue dans le numéro de juillet.

2085. Soient U et V deux quadriques ayant en commun une droite γ; soit β une génératrice de U du même système que γ, soit α une génératrice de V du même système que γ. Un plan passant par γ contient encore une génératrice x de U, une génératrice y de V: les deux plans (x, β) et (y, α) se coupent suivant une droite z: quel est le lieu de cette droite lorsqu'on fait varier le plan mené par γ? G. F.

2086. Soit OCA un triangle rectangle en C et tel que $CA = 2CO$; sur OC, à partir du point O, et du côté du point C, on prend $OS = OA$ et l'on mène par O une parallèle à AS qui rencontre en B le prolongement de AC.

AS est le côté et CB l'apothème du pentagone régulier inscrit dans le cercle de rayon CA.

CS est la hauteur d'une pyramide régulière à base pentagonale et telle que l'arête SA est égale au côté de la base; OS est le rayon de la sphère circonscrite à cette pyramide.

AS est le côté de l'icosaèdre régulier inscrit dans la sphère de rayon OS; SBO est la moitié de l'angle dièdre de cet icosaèdre. (E. Lacour.)

ERRATUM.

Page 397 : la matrice (1) ne doit pas être égalée à zéro.

[R8e]

A PROPOS DES ÉQUATIONS DE M. APPELL;

PAR M. ÉMILE COTTON.

Les pages suivantes contiennent deux remarques relatives : 1° au calcul de l'énergie d'accélération d'un système; 2° à la détermination des réactions correspondant à l'addition de nouvelles liaisons dans un système gêné, quand il n'y a pas frottement.

1. Considérons un système matériel dont la position est caractérisée par les valeurs de $k+s$ paramètres $q_1, \ldots, q_{k+s}$. Supposons de plus ces paramètres liés par les s équations

$$(1)\quad dq_{k+i} = \alpha_{i1}\,dq_1 + \ldots + \alpha_{ik}\,dq_k + \alpha_i\,dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

auxquelles nous conserverons la forme différentielle sans rechercher si elles peuvent, en totatité ou en partie, être remplacées par des relations finies.

Le système a un degré de liberté égal à k; écrivons les équations du mouvement, autres que (1),

$$(2)\qquad P_h = Q_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, k),$$

en admettant que

$$(3)\qquad Q_1\,\delta q_1 + \ldots + Q_k\,\delta q_k$$

représente le travail virtuel des forces agissant sur le système, pour un déplacement infiniment petit caractérisé par $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_k, \ldots, \delta q_{k+s}$, où

$$\delta q_{k+i} = \alpha_{i1}\,\delta q_1 + \ldots + \alpha_{ik}\,\delta q_k.$$

Si les liaisons sont sans frottement, les forces de liaison disparaissent dans l'expression (3).

L'expression

$$(4) \qquad P_1 \delta q_1 + \ldots + P_k \delta q_k$$

représente alors le travail virtuel changé de signe des forces d'inertie qui correspondent à un mouvement quelconque compatible avec les liaisons.

Cette interprétation des premiers membres des équations du mouvement rend intuitive l'importance des équations de la Mécanique analytique pour les problèmes de Mécanique appliquée, où les forces d'inertie ont souvent la même importance que les autres. A un autre point de vue, elle met en évidence le caractère invariant de l'expression (4).

2. M. Appell [1] a montré que les expressions P_1, P_2, ..., P_k peuvent s'obtenir à l'aide de l'énergie d'accélération $2S$ du système exprimée au moyen des dérivées secondes des paramètres à variations indépendantes $q''_1, q''_2, \ldots, q''_k$. On a

$$(5) \qquad P_1 = \frac{\partial S}{\partial q''_1}, \qquad \ldots, \qquad P_k = \frac{\partial S}{\partial q''_k}.$$

Or, S est une fonction du second degré de ces dérivées, et nous pouvons écrire

$$S = S_2 + S_1 + S_0,$$

S_2, S_1, S_0 désignant respectivement l'ensemble des termes de degré 2, 1, 0 par rapport à $q''_1, \ldots, q''_k$. Le

---

[1] *Voir* le Tome II de la deuxième édition de son *Traité de Mécanique rationnelle*, pour la bibliographie.

calcul de S_0 est inutile pour la formation des équations de M. Appell.

On a, d'après le théorème d'Euler,

$$(6) \qquad q''_1 P_1 + \ldots + q''_k P_k = 2S_2 + S_1,$$

de sorte que, *si par un procédé quelconque on a obtenu les équations du mouvement sous la forme expliquée au n° 1*, il sera facile de calculer la partie utile de l'énergie d'accélération : *on calcule l'expression* $q''_1 P_1 + \ldots + q''_k P_k$, *on double les termes du premier degré par rapport aux* q'' *dans le résultat obtenu et l'on supprime les termes indépendants.*

3. Par exemple, dans le cas d'un solide mobile autour d'un point fixe, rapporté à ses axes principaux d'inertie, en adoptant les notations classiques, les équations d'Euler

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = L,$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp = M,$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq = N,$$

donnent, en prenant des paramètres λ, μ, ν définis par les équations différentielles

$$\lambda' = p, \qquad \mu' = q, \qquad \nu' = r,$$

et observant que $L\delta\lambda + M\delta\mu + N\delta\nu$ représente bien le travail virtuel des forces agissant sur le solide,

$$2S = A\lambda''^2 + 2(C - B)\mu'\nu'\lambda'' + B\mu''^2 + 2(A - C)\nu'\lambda'\mu'' + C\nu''^2 + 2(B - A)\nu'\mu'\lambda'' + \ldots,$$

les termes non écrits étant inutiles.

4. Plus généralement, considérons un solide Σ rapporté à des axes $Gxyz$ passant par son centre de gravité, mobiles à la fois par rapport à Σ et par rapport à l'espace fixe [1].

Soient P, Q, R les projections de la rotation instantanée du trièdre $Gxyz$; p, q, r celles de la rotation du solide; u, v, w celles de la vitesse de G. Appelons M la masse du solide, A, B, C, D, E, F ses moments et produits d'inertie relatifs aux axes (ces dernières quantités peuvent varier avec le temps), et enfin $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ les coordonnées pluckériennes du dyname agissant sur Σ.

Les équations générales du mouvement sont celles du mouvement du centre de gravité

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} M(u' + Qw - Rv) &= \mathfrak{X},\\ M(v' + Ru - Pw) &= \mathfrak{Y},\\ M(w' + Pv - Qu) &= \mathfrak{Z},\end{aligned}\right.$$

et en posant

$$2T_r = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq,$$

$$\sigma_x = \frac{\partial T_r}{\partial p}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial T_r}{\partial q}, \qquad \sigma_z = \frac{\partial T_r}{\partial r},$$

celles du mouvement autour du centre de gravité

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\sigma_x}{dt} - Q\sigma_z - R\sigma_y &= \mathfrak{L},\\ \frac{d\sigma_y}{dt} + R\sigma_x - P\sigma_z &= \mathfrak{M},\\ \frac{d\sigma_z}{dt} + P\sigma_y - Q\sigma_x &= \mathfrak{N}.\end{aligned}\right.$$

Prenons des paramètres définis par

$$dq_1 = u\,dt, \qquad dq_2 = v\,dt, \qquad \ldots, \qquad dq_6 = r\,dt,$$

---

[1] On ramène aisément le cas d'axes quelconques au cas examiné dans le texte.

et écrivons $u\delta t, \ldots, r\delta t$ à la place de $\delta q_1, \ldots, \delta q_6$, puis $u', \ldots, r', u, \ldots, r$, à la place de $q''_1, \ldots, q''_6$, $q'_1, \ldots, q'_6$. Le travail virtuel du dyname agissant sur le solide est

$$(u\mathfrak{X} + v\mathfrak{Y} + w\mathfrak{Z} + p\mathfrak{L} + q\mathfrak{M} + r\mathfrak{N})\delta t,$$

et les termes utiles de l'énergie d'accélération $2S$ sont donnés en multipliant par 2 les termes utiles de

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} S = \; & M[u'(u' - Qw - Rv) - v'(v' - Ru - Pw) \\ & \qquad + w'(w' - Pv - Qu)] \\ & + p'\left(\frac{d\sigma_x}{dt} - Q\sigma_z - R\sigma_y\right) + q'\left(\frac{d\sigma_y}{dt} + R\sigma_x - P\sigma_z\right) \\ & \qquad + r'\left(\frac{d\sigma_z}{dt} + P\sigma_y - Q\sigma_x\right) \\ & - \tfrac{1}{2}[M(u'^2 + v'^2 - w'^2) - Ap'^2 - Bq'^2 + Cr'^2 \\ & \qquad - 2Dq'r' - 2Er'p' - 2Fp'q'] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

En définitive, nous trouvons l'énergie d'accélération pour un solide libre en utilisant les équations générales de son mouvement. Le résultat trouvé servira à écrire les équations du mouvement d'un solide gêné en évitant l'élimination des forces de liaison, élimination dont on ne peut se dispenser si l'on emploie exclusivement les équations générales. De plus, on peut, dans le cas d'un solide, déterminer le dyname des forces de liaison, s'il n'y a pas frottement en dirigeant convenablement l'emploi des méthodes de Lagrange ou de M. Appell. C'est ce qui va résulter d'une proposition plus générale que nous allons établir.

5. Considérons un système matériel sans frottement Σ_{k+s} dont le degré de liberté soit $k + s$; soient q_1, $q_2, \ldots, q_{k+s}$ les paramètres à variations indépendantes.

Soit $2S$ l'énergie d'accélération. Écrivons les équations du mouvement

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial S}{\partial q''_1} = Q_1, & \ldots, & \dfrac{\partial S}{\partial q''_k} = Q_k, \\ \dfrac{\partial S}{\partial q''_{k+1}} = Q_{k+1}, & \ldots, & \dfrac{\partial S}{\partial q''_{k+s}} = Q_{k+s}. \end{array}\right.$$

Sans changer les forces données, ajoutons de nouvelles liaisons sans frottement, que nous supposons traduites par s équations que nous prenons sous forme différentielle (peu importe que ces liaisons soient ou ne soient pas exprimables en termes finis). Soit Σ_k le système obtenu. La méthode de M. Appell permettant de faire un changement des variables q, telles que les nouvelles variables soient liées aux anciennes par des équations aux différentielles totales ne formant pas nécessairement un système complètement intégrable, nous pouvons supposer qu'un tel changement de variables a été fait de façon que les s équations des liaisons nouvelles soient précisément

$$(11)\qquad dq_{k+1} = 0, \quad \ldots, \quad dq_{k+s} = 0.$$

Les paramètres indépendants sont maintenant q_1, q_2, ..., q_k. L'énergie d'accélération $2\overline{S}$ du nouveau système se déduit de celle de l'ancien $2S$ en y faisant

$$(12)\qquad q'_{k+1} = \ldots = q'_{k+s} = 0,$$

$$(13)\qquad q''_{k+1} = \ldots = q''_{k+s} = 0.$$

Les nouvelles équations du mouvement sont

$$\frac{\partial \overline{S}}{\partial q''_1} = \overline{Q_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \overline{S}}{\partial q''_k} = \overline{Q_k};$$

$\overline{Q_1}, \ldots, \overline{Q_k}$ désignent ce que deviennent $Q_1, \ldots, Q_k$ quand on tient compte des équations (12).

Or, le mouvement de Σ_k peut être considéré comme un mouvement de Σ_{k+s} sous l'action des forces données antérieurement et de forces nouvelles dues aux liaisons ajoutées. Désignons alors par $\left(\frac{\partial S}{\partial q_{k+1}}\right), \ldots, \left(\frac{\partial S}{\partial q_{k+s}}\right)$, ce que deviennent $\frac{\partial S}{\partial q''_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q''_{k+s}}$ quand on fait intervenir les relations (12) et (13); $\overline{Q_{k+1}}, \ldots, \overline{Q_{k+s}}$ correspondant de la même façon à $Q_{k+1}, \ldots, Q_{k+s}$, posons

$$(14) \qquad Q'_{k+1} = \left(\frac{\partial S}{\partial q''_{k+1}}\right) - \overline{Q_{k+1}}, \qquad \ldots \qquad Q'_{k+s} = \left(\frac{\partial S}{\partial q''_{k+s}}\right) - \overline{Q_{k+s}}.$$

L'expression

$$(15) \qquad Q'_{k+1}\,\delta q_{k+1} + \ldots + Q'_{k+s}\,\delta q_{k+s}$$

représente le travail virtuel des forces dues aux liaisons ajoutées.

Ce résultat s'applique aussi bien aux systèmes holonomes et aux équations de Lagrange lorsque les liaisons ajoutées sont exprimables en termes finis. On choisit les variables de telle façon que les liaisons ajoutées se traduisent par les équations

$$(16) \qquad q_{k+1} = q^0_{k+1}, \quad \ldots, \quad q_{k+s} = q^0_{k+s},$$

les q^0 désignant des constantes. A la place des dérivées $\frac{\partial S}{\partial q''_{k+i}}$ on a les expressions $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_{k+i}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_{k+i}}$, où $2T$ désigne la force vive de Σ_{k+s}.

On observe que la méthode précédente revient à combiner celle des multiplicateurs de Lagrange avec un changement de variables convenable.

On peut appliquer la méthode précédente à un solide gêné en partant du solide libre ($k+s=6$). Le dyname des réactions est, comme on sait, complètement déter-

miné par l'expression de son travail virtuel pour un déplacement quelconque du solide.

6. *Exemple I.* — Un solide de révolution homogène et pesant est mobile autour d'un point O de son axe, qui est fixe. On demande quel couple il faut appliquer au solide pour que son axe décrive un cône déterminé S, cette liaison étant sans frottement.

Conservons les notations classiques du problème de Lagrange et de Poisson, telles qu'elles sont indiquées dans le Traité de M. Appell. Supposons le cône donné par une équation de la forme

$$\psi = f(\theta). \tag{17}$$

Pour appliquer ce qui précède, effectuons le changement de variables

$$\psi = \psi_1 + f(\theta); \tag{18}$$

l'équation (17) devient

$$\psi_1 = 0. \tag{19}$$

La force vive du solide non soumis à cette liaison serait

$$\begin{aligned} 2T = {} & A\{[\psi_1' + f'(\theta)\theta']^2 \sin^2\theta + \theta'^2\} \\ & + C\{[\psi_1' + f'(\theta)\theta']\cos\theta + \varphi'\}^3, \end{aligned}$$

et l'équation de Lagrange relative à ψ_1 serait

$$\frac{d}{dt}\{A\sin^2\theta[\psi_1' + f'(\theta)\theta'] + C\cos\theta\{[\psi_1' + f'(\theta)\theta']\cos\theta + \varphi'\}\} = 0.$$

Tenant compte de l'équation (19) de la liaison ajoutée le premier membre devient

$$\frac{d}{dt}\{A\sin^2\theta f'(\theta)\theta' + C\cos\theta[f'(\theta)\theta'\cos\theta + \varphi']\} = H. \tag{20}$$

Il resterait à faire disparaître les dérivées secondes

dans l'expression de H au moyen des équations du mouvement.

Lorsque φ, θ, ψ_1 varient respectivement de $\delta\varphi$, $\delta\theta$, $\delta\psi_1$, le travail virtuel du couple cherché est $H\delta\psi_1$. Le moment de ce couple est nul par rapport à Oz puisque $\delta\varphi$ ne figure pas dans cette expression; $\delta\theta$ n'y figurant pas, le moment du couple est nul par rapport à l'axe instantané de rotation correspondant au mouvement où θ varie, φ restant constant [à cause de (17), ψ varie aussi]. Cet axe est situé dans le plan normal au cône S passant par l'axe Oz, et, puisque le moment du couple est nul par rapport à deux axes de ce plan, il est nul par rapport à tout axe de ce plan. L'axe du couple est donc normal à ce plan; le moment du couple par rapport à Oz_1 est d'ailleurs H; ce qui suffit à déterminer le couple.

7. *Exemple II.* — Une sphère homogène S se meut en roulant sur une surface fixe Σ sur laquelle elle ne peut ni glisser ni pivoter. Déterminer les réactions, en supposant que le mouvement ait lieu sous l'action d'un certain système de forces données.

Dans le cas d'une sphère homogène, la formule (9) du n° 4 devient, puisque $A = B = C$ et que $D = E = F = 0$,

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} 2S = {} & M[u'(u' - 2Qw - 2Rv) - v'(v' - 2Ru - 2Pw) \\ & \qquad - w'(w' - 2Pv - 2Qu)] \\ & + A[p'(p - 2Qr - 2Rq) - q'(q' + 2Rp - 2Pr) \\ & \qquad - r'(r' + 2Pq - 2Qp)] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Les équations de liaison sont ici, en désignant par a le rayon de la sphère et supposant Gz dirigé suivant la normale commune à S et à Σ :

$$(22)\quad u - aq = 0, \qquad v - ap = 0, \qquad w = 0, \qquad r = 0.$$

Nous poserons [1]

$$(23) \qquad u = u_1 + aq, \qquad v = v_1 - ap,$$

de sorte que les équations (22) deviennent

$$(24) \qquad u_1 = 0, \qquad v_1 = 0, \qquad w = 0, \qquad r = 0.$$

En observant que $\frac{\partial u}{\partial u_1} = 1, \frac{\partial u}{\partial v_1} = \frac{\partial u}{\partial w} = \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \ldots,$ on voit que les premiers membres des équations de M. Appell relatives aux intégrales $\int u_1\,dt$, $\int v_1\,dt$, $\int w\,dt$, $\int r\,dt$ prises comme paramètres sont

$$\begin{aligned}
F_1 &= M(u' + Qw - Rv) = \quad Ma(q' \quad + Rp) + \ldots = F + \ldots,\\
H_1 &= M(v' + Ru - Pv) = \quad Ma(-p' + Rq) + \ldots = H + \ldots,\\
K_1 &= M(w' + Pv - Qu) = -Ma(Pp + Qq) + \ldots = K + \ldots,\\
L_1 &= A(r' + Pq - Qp) = A(Pq - Qp) \qquad + \ldots = L + \ldots.
\end{aligned}$$

Les points désignent des termes qui s'annulent quand on utilise les relations (24).

Soient $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ les coordonnées pluckériennes du système des forces données; en désignant par $u_1\,\delta t$, $v_1\,\delta t$, $w\,\delta t$, $p\,\delta t$, $q\,\delta t$, $r\,\delta t$ les variations infinitésimales des six paramètres adoptés pour le solide libre, le travail virtuel des forces données est

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{L}p + \mathcal{M}q + \mathcal{N}r + \mathcal{X}u + \mathcal{Y}v + \mathcal{Z}w)\,\delta t\\
&\quad = [(\mathcal{L} - a\mathcal{Y})p + (\mathcal{M} + a\mathcal{X})q + \mathcal{N}r + \mathcal{X}u_1 + \mathcal{Y}v_1 + \mathcal{Z}w]\,\delta t.
\end{aligned}$$

Celui des forces de liaison est donc

$$[(F - \mathcal{X})u_1 + (H - \mathcal{Y})v_1 + (K - \mathcal{Z})w + (L - \mathcal{N})r]\,\delta t.$$

---

[1] p, q, r, u_1, v_1, w sont les coordonnées pluckériennes du torseur des rotations instantanées du solide rendu libre par rapport à des axes parallèles aux premiers, mais ayant pour origine le point de contact de S et Σ.

Les forces de liaison constituent par suite un dyname réductible à une force unique passant par le point de contact de projections $F - \mathcal{X}$, $H - \mathcal{Y}$, $K - \mathcal{Z}$, et à un couple de moment $L - \mathcal{N}$ porté par la normale commune Gz. Dans ces dernières expressions il convient de remplacer encore les dérivées p' et q' par leurs valeurs tirées des équations du mouvement (équations de M. Appell relatives au mouvement de la sphère assujettie aux liaisons et aux intégrales $\int p\,dt$, $\int q\,dt$ prises comme paramètres):

$$(A + Ma^2)(p' - Rq) = \mathcal{L} - a\mathcal{Y},$$
$$(A + Ma^2)(q' + Rp) = \mathcal{M} + a\mathcal{X}.$$

[N'1K]

SUR UN THÉORÈME DE M. PICARD;

PAR M. CH. MICHEL.

Je me propose de donner une nouvelle démonstration du théorème suivant, dû à M. Picard :

La courbe gauche unicursale de degré m la plus générale dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire admet $2(m-3)$ *points où la tangente a avec elle un contact du second ordre* (¹).

Les tangentes à la courbe faisant partie d'un complexe linéaire, les points de contact des plans osculateurs menés à la courbe d'un point quelconque P de l'espace sont, d'après un théorème de M. Appell, les points d'intersection de la courbe avec le plan polaire

(¹) E. PICARD, *Application de la théorie des complexes à l'étude des surfaces et des courbes gauches* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 1877).

du point P par rapport au complexe linéaire considéré. Si donc m est le degré de la courbe, ces points sont au nombre de m. *La classe de la courbe est égale à son degré.*

Cela posé, déterminons les plans qui passent par le point P et qui rencontrent la courbe en trois points confondus en un seul. Les coordonnées tétraédriques x, y, z, t d'un point quelconque de la courbe s'expriment au moyen de polynomes entiers par rapport à une variable λ :

$$x = f(\lambda), \qquad y = g(\lambda), \qquad z = h(\lambda), \qquad t = k(\lambda),$$

et l'on peut disposer de la représentation paramétrique ou du tétraèdre de référence de façon que les polynomes f, g, h, k soient tous les quatre de degré m. Soient α, β, γ, δ les coordonnées du point P. Si u, v, w, s sont les coordonnées tangentielles d'un des plans cherchés, on a d'abord

$$u\alpha + v\beta + w\gamma + s\delta = 0.$$

Ensuite, le paramètre λ du point de la courbe où viennent se confondre trois points d'intersection de la courbe et du plan est racine triple de l'équation

$$u f(\lambda) + v g(\lambda) + w h(\lambda) + s k(\lambda) = 0.$$

Autrement dit, si l'on rend cette équation homogène par l'introduction d'une variable μ qu'on regarde ensuite comme égale à 1, λ vérifie à la fois les trois équations

$$u \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} + v \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda^2} + w \frac{\partial^2 h}{\partial \lambda^2} + s \frac{\partial^2 k}{\partial \lambda^2} = 0,$$

$$u \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda \partial \mu} + v \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda \partial \mu} + w \frac{\partial^2 h}{\partial \lambda \partial \mu} + s \frac{\partial k^2}{\partial \lambda \partial \mu} = 0,$$

$$u \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} + v \frac{\partial^2 g}{\partial \mu^2} + w \frac{\partial^2 h}{\partial \mu^2} + s \frac{\partial^2 k}{\partial \mu^2} = 0.$$

Il s'ensuit que λ est l'une quelconque des racines de l'équation

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial\lambda^2} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial\lambda^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial\lambda^2} & \dfrac{\partial^2 k}{\partial\lambda^2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial\lambda\,\partial\mu} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial\lambda\,\partial\mu} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial\lambda\,\partial\mu} & \dfrac{\partial^2 k}{\partial\lambda\,\partial\mu} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial\mu^2} & \dfrac{\partial^2 g}{\partial\mu^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial\mu^2} & \dfrac{\partial^2 k}{\partial\mu^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est de degré $3(m-2)$. Or, quand le point P varie, elle admet, comme nous l'avons vu, seulement m racines variables. Il en résulte que, quelle que soit la position du point P, elle admet $3(m-2)-m$ c'est-à-dire $2(m-3)$ racines fixes. Si l'on considère un des $2(m-3)$ points A de la courbe qui ont pour paramètres ces $2(m-3)$ racines fixes, il existe une infinité de plans rencontrant la courbe en trois points confondus avec ce point; autrement dit, tout plan tangent à la courbe en ce point rencontre la courbe en trois points confondus. Comme les tangentes à la courbe font partie d'un complexe linéaire, les $2(m-3)$ points A sont les points où la tangente a avec la courbe un contact du second ordre. Le théorème est démontré.

Pour être précis, il convient de montrer que l'équation (1) est effectivement de degré $3(m-2)$ et non de degré moindre, si la représentation paramétrique a été convenablement choisie. Posons

$$f(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + a_2\lambda^{m-2} + \ldots,$$

$$g(\lambda) = b_0\lambda^m + b_1\lambda^{m-1} + b_2\lambda^{m-2} + \ldots,$$

$$h(\lambda) = c_0\lambda^m + c_1\lambda^{m-1} + c_2\lambda^{m-2} + \ldots,$$

$$k(\lambda) = d_0\lambda^m + d_1\lambda^{m-1} + d_2\lambda^{m-2} + \ldots.$$

On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} = m(m-1)a_0\lambda^{m-2} + \ldots,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda \partial \mu} = (m-1)a_1\lambda^{m-2} + \ldots,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2} = 2a_2\lambda^{m-2} + \ldots,$$

puis des expressions analogues des dérivées secondes de g, h, k. Il s'ensuit que le terme en $\lambda^{3(m-2)}$ dans l'équation (1) a pour coefficient

$$\text{(T)} \qquad 2m(m-1)^2 \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Si, quelle que soit la position du point P, ce coefficient était nul, les déterminants du troisième ordre déduits du tableau (T)

$$\left\| \begin{matrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{matrix} \right\|$$

seraient simultanément nuls. Mais je dis qu'il en résulterait qu'au point de paramètre ∞ la tangente aurait avec la courbe un contact du second ordre. En effet, exprimons qu'un plan de coordonnées tangentielles u, v, w, s rencontre la courbe en trois points confondus avec le point de paramètre ∞. L'équation

$$uf(\lambda) + v\,g(\lambda) + w\,h(\lambda) + s\,k(\lambda) = 0$$

doit avoir trois racines infinies ; par suite, on doit avoir les relations

$$ua_0 + vb_0 + wc_0 + sd_0 = 0,$$
$$ua_1 + vb_1 + wc_1 + sd_1 = 0,$$
$$ua_2 + vb_2 + wc_2 + sd_2 = 0,$$

qui sont linéaires et homogènes en u, v, w, s. Le tableau des coefficients de u, v, w, s est justement le tableau (T). Si les déterminants du troisième ordre déduits de ce tableau sont tous nuls, les équations en u, v, w, s admettent une infinité de solutions non proportionnelles entre elles. Il existe alors une infinité de plans rencontrant la courbe en trois points confondus avec le point de paramètre ∞. La tangente en ce point a donc bien avec la courbe un contact du second ordre. Or, il est possible de disposer de la représentation paramétrique propre sur la courbe de façon que la tangente au point de paramètre ∞ ait avec la courbe un contact ordinaire. Par suite, la représentation paramétrique étant convenablement choisie, l'équation (1) est effectivement de degré $3(m-2)$.

[O4g]

SUR UN THÉORÈME RELATIF A LA DÉFORMATION DES SURFACES GAUCHES;

PAR M. CHARRASSE,
Répétiteur au Lycée de Nice.

Les *Nouvelles Annales* ont publié, dans le numéro de février 1889, une Note de M. Amigues sur l'équation générale des surfaces réglées dont la ligne de striction satisfait à certaines conditions et, dans le numéro de novembre 1895, une Note du même auteur sur les surfaces gauches dont une même courbe plane est à la fois ligne de striction et ligne de courbure.

Ces deux Notes avaient pour objet de montrer les applications d'une relation nouvelle et simple entre l'angle α d'une génératrice avec la ligne de striction

et le paramètre de distribution ϖ de la génératrice, savoir :

$$\frac{\sin^2\alpha}{\varpi^2} = \sum \left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2,$$

λ, μ, ν étant les cosinus des angles que la génératrice fait avec les trois axes de coordonnées rectangulaires, avec la condition $\Sigma\lambda^2 = 1$, s une variable auxiliaire représentant la longueur de l'arc de la ligne de striction compris entre un point fixe et un point variable.

Je me propose, dans cette Note, d'appliquer la formule de M. Amigues à la solution du problème suivant énoncé dans les *Leçons sur la Théorie générale des surfaces,* de M. Darboux (3e Partie, p. 312) :

Théorème. — *Toutes les surfaces gauches dont la ligne de striction coupe les génératrices à angle droit et pour lesquelles le paramètre de distribution des génératrices est constant sont applicables sur l'alysséide.*

Soient

$$x = f(s) + \lambda u,$$
$$y = \varphi(s) + \mu u,$$
$$z = \psi(s) - \nu u$$

les équations d'une génératrice; s et u sont deux variables indépendantes; λ, μ, ν fonctions de s; $f(s)$, $\varphi(s)$, $\psi(s)$ sont les coordonnées du point de contact de la ligne de striction avec la génératrice.

On doit avoir

$$\Sigma\lambda' f' = 0.$$

Exprimons que la ligne de striction est trajectoire orthogonale des génératrices. Il vient

$$\Sigma\lambda f' = 0.$$

La formule de M. Amigues donne

$$\Sigma\lambda'^2 = \frac{1}{\varpi^2} = \text{const.}$$

Or, l'expression de l'élément linéaire de la surface est donnée par

$$dS^2 = \Sigma\lambda^2\, du^2 + 2[u\Sigma\lambda\lambda' + \Sigma\lambda f']\, du\, dv$$
$$+ [u^2\Sigma\lambda'^2 + 2u\Sigma\lambda' f' + \Sigma f'^2]\, ds^2,$$

λ, μ, ν étant les cosinus directeurs de la génératrice

$$\Sigma\lambda^2 = 1, \qquad \Sigma\lambda\lambda' = 0.$$

Tenant compte des relations précédentes

$$dS^2 = du^2 + \left(u^2\frac{1}{\varpi^2} + \Sigma f'^2\right) ds^2.$$

Mais

$$\Sigma f'^2 = P^2 + \varpi^2,$$

P étant égal à l'u changé de signe du point central sur la génératrice, compté à partir de la trajectoire orthogonale $u = 0$.

Cette trajectoire correspond ici à la ligne de striction. Donc $P = 0$ et l'élément linéaire de la surface est donné par

$$dS^2 = du^2 + \left(\frac{u^2}{\varpi^2} + \varpi^2\right) ds^2$$

de la forme

$$dS^2 = du^2 + (au^2 + b)\, ds^2,$$

a et b étant deux constantes.

Cette forme caractérise l'alysséide. C. Q. F. D.

[J2c]

SUR LE PROBLÈME DU SCRUTIN;

PAR M. G. DUMAS.

Deux candidats A *et* B *sont en présence; un électeur bien informé sait à l'avance que* A *aura* m *voix et* B, n *voix,* m *étant plus grand que* n. *On demande la probabilité pour que* A *garde la majorité pendant tout le dépouillement du scrutin.*

MM. André [1] et Poincaré [2] ont résolu, chacun de leur côté, cet intéressant petit problème. Leurs solutions, ainsi que la suivante, ont de grandes analogies. Elles ne se distinguent que dans la manière, plus simple ici, d'établir l'égalité (6), $n_1 = n_2$, ci-dessous indiquée [3].

Supposons que le scrutin ait été dépouillé de toutes les façons possibles. Les bulletins, correspondant à chacun des dépouillements, se succèdent dans un ordre déterminé et constituent, dans leur ensemble, une permutation avec répétition de m lettres A et n lettres B.

Soient l le nombre total de ces permutations, k le nombre de celles dans lesquelles A conserve, d'un bout à l'autre, la majorité. La probabilité demandée est égale, par définition, à $\frac{k}{l}$, où

$$l = \frac{(m+n)!}{n!\,m!}. \tag{1}$$

(1) D. ANDRÉ, *Comptes rendus*, t. CV, 1887, p. 436 et J. BERTRAND, *Calcul des probabilités*, p. 18.

(2) H. POINCARÉ, *Calcul des probabilités*, p. 21.

(3) *Voir* aussi E. CZUBER, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, p. 34.

Il s'agit de déterminer la valeur de k.

Les permutations, qui se rapportent aux dépouillements dans lesquels A n'a pas la majorité d'un bout à l'autre des opérations, peuvent se répartir en deux classes.

Dans la première G_1, on mettra les n_1 permutations, dont la première lettre est B. Comme, au début même des dépouillements qui leur correspondent, A perd la majorité, les lettres A et B qu'elles renferment, à partir de la première B, se succèdent n'importe comment.

On a, par conséquent,

$$n_1 = \frac{(m+n-1)!}{(n-1)!\,m!}. \tag{2}$$

La seconde classe G_2 renfermera les n_2 autres permutations, de même nature, commençant par A.

On a

$$n_1 + n_2 = l - k. \tag{3}$$

Si, pour fixer les idées, on prend $m = 5$, $n = 3$, l'une des permutations de G_1 sera, par exemple,

$$\alpha = (B, B, A, A \mid B, A, A, A);$$

l'une des permutations de G_2,

$$\beta = (A, B \mid B, A, A, A, B, A).$$

Dans les seconds membres de α et β, les traits verticaux ont été tracés de façon qu'il y ait, à leur gauche, le même nombre de lettres A et B. De pareils traits pourront d'ailleurs toujours être menés dans chacune des permutations, supposées écrites, des classes G_1 et G_2, puisque, dans tous les dépouillements correspondants, A finit toujours par avoir la majorité. S'il

arrive que plusieurs traits, ainsi définis, se rencontrent dans une même permutation, seul sera considéré comme tracé celui qui se trouve le plus à gauche.

Remplaçons maintenant, dans le premier groupe de lettres de α, les lettres A par des lettres B, et réciproquement. Laissons, en revanche, intactes les lettres du second groupe. La permutation α, de G_1, se transforme ainsi en une permutation

$$\alpha' = (A, A, B, B \mid B, A, A, A)$$

du groupe G_2, puisque α' commence par A et que, dans le dépouillement correspondant, A n'a pas toujours la majorité.

Toute permutation de G_1 se transforme, de la sorte, en une permutation de G_2. Comme la transformation, par laquelle on passe de α à α', conduit aussi de α' à α, deux permutations distinctes de G_1 auront comme correspondantes deux permutations également distinctes de G_2.

Les permutations de G_1 sont, par conséquent, en nombre égal ou inférieur à celui des permutations de G_2.

On a

$$(4) \qquad n_1 \leqq n_2.$$

On verrait, de la même façon, en partant des permutations β de G_2, que nécessairement

$$(5) \qquad n_2 \leqq n_1.$$

De (4) et (5) on déduit aussitôt

$$(6) \qquad n_1 = n_2.$$

Les classes G_1 et G_2 comprennent, chacune, un même nombre de permutations; la transformation in-

diquée les réunit par une correspondance univoque et réciproque.

On a donc, en vertu de (1), (2), (3) et (6)

$$k = \frac{(m+n)!}{n!\,m!} - 2\,\frac{(m+n-1)!}{(n-1)!\,m!} = \frac{(m+n-1)!}{n!\,m!}(m-n).$$

La probabilité, pour que A ait toujours la majorité, se réduit ainsi à

$$\frac{k}{l} = \frac{m-n}{m-n}.$$

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTEGRAL.

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Trouver les trajectoires orthogonales des courbes définies en coordonnées cartésiennes rectangulaires par l'équation*

$$(x^2+y^2)^2 - 2b^2(y^2-x^2) = a,$$

où b est une constante déterminée et a un paramètre variable.

II. *Intégrer le système d'équations différentielles*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - y,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x.$$

III. *On considère la sphère et le paraboloïde représentés en coordonnées rectangulaires respectivement par les équations*

$$x^2+y^2+z^2-2z=0,$$

$$x^2+3y^2-4z=0.$$

Calculer l'aire de la portion de surface de la sphère qui est extérieure au paraboloïde.

Épreuve pratique. — *Déterminer la valeur de l'intégrale définie*

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

(Juillet 1907.)

Épreuve écrite. — I. *On considère l'équation aux dérivées partielles*

$$2z^4\frac{\partial z}{\partial x} + 5xy\frac{\partial z}{\partial y} = 5zx.$$

1° *Trouver son intégrale générale;*

2° *Déterminer la surface* S *qui, rapportée à trois axes de coordonnées* Ox, Oy, Oz, *vérifie cette équation aux dérivées partielles et passe par la courbe définie par les équations*

$$x = 0, \qquad 4y + z^5 = 0;$$

3° *Exprimer les coordonnées* x, y, z *d'un point de* S *au moyen de deux paramètres* u *et* v *définis par les relations*

$$u + v = z, \qquad u^2 + v^2 = x,$$

et déterminer les lignes asymptotiques de cette surface S.

II. *Construire la courbe représentée en coordonnées cartésiennes par l'équation*

$$y = \int_1^x \frac{(x+a)\,dx}{x\sqrt{x^4-1}},$$

où a *est une constante.*

Épreuve pratique. — *On considère le paraboloïde* P *qui, par rapport à trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *a pour équation*

$$z = xy,$$

et, dans le plan des xy, *la courbe* C *qui, dans le système*

de coordonnées polaires de pôle O *et d'axe polaire* Ox, *a pour équation*

$$r^2 = \cos\theta.$$

1° *Calculer l'aire de la portion du paraboloïde qui se projette sur le plan des* xy *à l'intérieur de la courbe* C *et dans l'angle des directions positives des axes;*

2° *Calculer le volume du cylindre projetant cette aire sur le plan des* xy, *ce cylindre étant limité au plan des* xy *et au paraboloïde* P.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Besançon.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Un fil homogène pesant repose en équilibre sur deux aiguilles parallèles horizontales et de niveau projetées en* A *et* B *sur le plan vertical du fil.*

La distance des aiguilles est $2a$, *le paramètre de la chaînette intermédiaire est* c.

L'épaisseur des aiguilles étant négligée, on demande :

1° *De calculer la longueur totale* $2l$ *du fil;*

2° *De préciser la condition de stabilité de l'équilibre considéré.*

II. *Exposer sommairement la théorie de l'équilibre stable d'un flotteur pesant sur un liquide homogène pesant.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une roue de* 60 *dents* conduit *un pignon de* 6 *ailes. A l'instant où la dent de la roue va abandonner le flanc rectiligne du pignon, ce flanc fait avec la ligne des centres un angle* $a = 42°15'47''$.

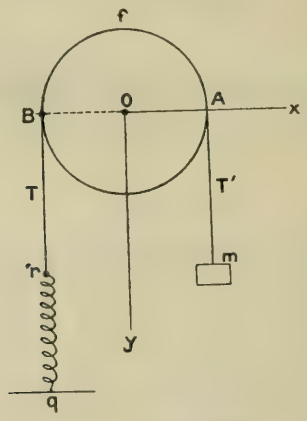
Connaissant le coefficient de frottement 0,15 *et le moment moteur* P = 1 *gramme-millimètre, calculer le moment résistant* Q. (Juin 1907.)

Bordeaux.

Épreuve théorique. — I. *Méthode de Roberval pour le tracé des tangentes; application à la cycloïde.*

II. *Énoncé du théorème de Coriolis; son application à la détermination de la courbure de la cycloïde.*

III. *Une poulie homogène de masse* M *et de rayon* R *est mobile sans frottement autour d'un axe horizontal passant par son centre et perpendiculaire à son plan.*



Sur cette poulie passe un fil sans masse mfr; à l'extrémité m est attaché un poids de masse m; l'autre extrémité est reliée à un ressort vertical élastique rq fixé par une extrémité au point q sur la verticale du point B. *Le ressort rq exerce sur le fil une tension* T *proportionnelle à l'allongement* $l - l_0$ *du ressort.*

Étudier le mouvement de la poulie et celui du poids m avec les conditions initiales suivantes : le ressort possède la longueur particulière l_0 *qui ne donne lieu à aucune tension et le système est au repos, la masse m étant sur la verticale du point* A, *et la longueur* rBfAm *étant égale à la longueur du fil. Calculer au cours du mouvement les tensions* T *et* T', *et la pression de la poulie sur son axe.*

On recherchera si, au cours du mouvement, la longueur mAfBr peut devenir inférieure à la longueur totale du fil, auquel cas le ressort cesserait d'agir en r.

On supposera que le fil ne peut glisser sur la poulie.

Épreuve pratique. — *Une plaque homogène, d'épaisseur négligeable, pesant* 20^{kg}, *a la forme d'un triangle équilatéral dont le côté vaut* $0^{m},60$. *Elle peut osciller librement autour du côté fixe* BC *qui est horizontal, et est actuellement au repos, dans le plan vertical* ABC.

Une sphère, de rayon négligeable, pesant 1^{kg}, *vient, avec une vitesse de* 26^{m} *par seconde, perpendiculaire au plan* ABC, *choquer la plaque en* A, *et fait dès lors corps avec cette plaque.*

On demande de déterminer la vitesse angulaire initiale de la plaque ABC *autour de l'axe* BC.

(Novembre 1907.)

Grenoble.

Composition. — *Un tube rectiligne homogène, de diamètre et d'épaisseur négligeables, a pour longueur* $2l$ *et pour masse* m. *Dans ce tube coulisse une tige homogène infiniment mince, de même longueur et de même masse.*

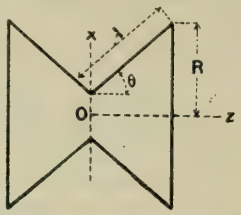
Le tube et la tige sont pesants; de plus le centre de gravité G *du tube et le centre de gravité* G' *de la tige s'attirent proportionnellement à leur distance, l'attraction étant* $\frac{1}{2}mk^2$ *pour l'unité de distance. Le système est en outre assujetti à se mouvoir dans un plan vertical fixe* P. *Les liaisons sont sans frottement.*

Étudier le mouvement du système. On prend comme paramètres les coordonnées x, y *du centre de gravité* Γ *du système par rapport à des axes fixes* Ox, Oy *tracés dans* P, Oy *étant une verticale ascendante, la distance* $\rho = \Gamma G'$ *et l'angle* θ *de* ΓG' *avec* Ox.

Épreuve pratique. — *Une tôle homogène rigide d'épaisseur négligeable a pour forme la surface extérieure de la figure constituée par deux troncs de cône égaux réunis par leur plus petite base.*

La masse par unité de surface est μ, *le rayon des*

grandes bases est R, *la longueur des apothèmes est* l, *le demi-angle au sommet* θ.



1° *Déterminer les moments d'inertie du solide ainsi constitué, savoir :* C *moment par rapport à l'axe de révolution,* A *moment par rapport à un axe perpendiculaire passant par le centre de gravité;*

2° *Appliquer au cas où* $l = R$, $\theta = 30°$;

3° *Le solide étant animé d'une rotation de vitesse angulaire* ω *autour de son axe de révolution supposé horizontal, et d'une translation de vitesse* V *dirigée suivant la verticale descendante, reçoit, au point le plus bas de l'une des grandes bases, une percussion d'intensité* P, *normale au cône correspondant, dirigée vers l'axe. Déterminer l'état des vitesses immédiatement après la percussion.*

[*Pour cette question, on désignera par* M *la masse du solide, par* A *et* C *ses moments d'inertie, sans les remplacer par leurs valeurs.*]

4° *Appliquer le résultat trouvé aux données du n° 2°, en supposant de plus* $V = \frac{R\omega}{100}$ *et* $P = MV$.

(Novembre 1907.)

Lille.

Cours. — *Mouvement d'une sphère homogène glissant avec frottement sur un plan horizontal fixe dépoli. On étudiera successivement le cas où la vitesse initiale de glissement n'est pas nulle et celui où elle est nulle.*

Problèmes. — I. Cinématique. — *Soient* V *et* Γ *la vitesse et l'accélération d'un point quelconque d'un solide animé du mouvement le plus général.*

Trouver les lieux des points qui, dans le solide,

satisfont aux conditions; 1° $V = \text{const.}$; 2° $\Gamma = \text{const.}$; 3° $V\Gamma\cos(V, \Gamma) = \text{const.}$; 4° Angle $(V, \Gamma) = \frac{\pi}{2}$. *Trouver enfin le lieu des points du corps qui, au même instant donné, sont points d'inflexion de leurs trajectoires.*

II. Dynamique. — *Un plan* Π *parfaitement poli est animé d'un mouvement hélicoïdal uniforme autour d'un axe vertical fixe; l'angle* α *constant de ce plan avec l'axe est tel que* $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. *Étudier le mouvement d'un point pesant astreint à se mouvoir sans frottement sur ce plan* π. (Novembre 1907.)

Nancy.

Épreuve écrite. — *Une plaque rectangulaire, homogène, pesante, est mobile autour de la droite* (d) *menée, dans cette plaque, par son centre de gravité* C *parallèlement au grand côté du rectangle. On imprime à cette droite* (d) *assujettie à rester toujours horizontale, un mouvement uniforme de rotation autour de la verticale menée par* C.

A l'une des extrémités de la droite (d') *menée dans la plaque, par* C, *parallèlement au petit côté du rectangle, on a soudé une petite masse pesante* m *que l'on envisagera ici comme un point matériel.*

A l'instant initial, la demi-droite qui va de C *vers* m *fait un angle de* 30° *avec la nadirale de* C *et n'a aucune vitesse initiale.*

La densité de la plaque est 7,7; *les longueurs des côtés du rectangle sont* 20^{cm} *et* 10^{cm}, *l'épaisseur de la plaque est* 1^{mm}; *la masse* m *est égale à* 7^{g}; *la droite* (d) *fait un tour complet autour du point* C *en une demi-seconde.*

On demande d'étudier le mouvement de la plaque autour de la droite (d); *on évaluera en particulier la durée d'une oscillation et les valeurs extrêmes de l'angle que fait la droite* (d') *avec la nadirale de* C.

Épreuve pratique. — *Un parallélépipède rectangle homogène a pour base un carré de* 1^{m} *de côté et pour hau-*

teur 1^{dm}. *Déterminer les points de l'espace pour lesquels l'ellipsoïde d'inertie de ce parallélépipède est une sphère.*

(Juin 1907.)

Épreuve écrite. — *Un paraboloïde de révolution autour de son axe* Oz, *dirigé vers le zénith, tourne d'un mouvement uniforme autour de cet axe avec une vitesse angulaire donnée* $\omega > 0$.

Un point matériel A, *de masse* m, *peut se mouvoir soit sur la surface (intérieure) du paraboloïde, soit dans sa concavité.*

A l'instant initial, on abandonne A *en un point donné* A_0 *de la surface du paraboloïde, situé à une distance* r_0 *de son axe, en lui imprimant une vitesse initiale* v_0 *tangente à la surface du paraboloïde.*

Le point matériel A *est pesant et il est, en outre, repoussé par le sommet* O *du paraboloïde; cette force de répulsion, dirigée suivant* OA, *est proportionnelle à la distance* R *des deux points* O *et* A; *son intensité à l'unité de distance est égale à* $\frac{mg}{p}$, *si* g *désigne la constante de la gravité et* $\frac{p}{2}$ *la distance du foyer du paraboloïde à son sommet.*

Étudier le mouvement du point A. *Discuter.*

Envisager en particulier le cas où la vitesse initiale de A *est horizontale et, plus particulièrement, celui où elle est (en outre) dirigée en sens contraire du mouvement de rotation du paraboloïde autour de son axe et où son intensité est égale au produit de* r_0 *par* ω.

Envisager aussi le cas où la vitesse initiale v_0 *est nulle et où* ω *est soit très grand, soit très petit.*

(Octobre 1907.)

Toulouse.

Épreuve écrite. — *Un cône de révolution homogène non pesant est fixé par son sommet en un point* O *et peut tourner autour de ce point.*

Tous ses points sont attirés par un point fixe A *proportionnellement à leur distance à ce point.*

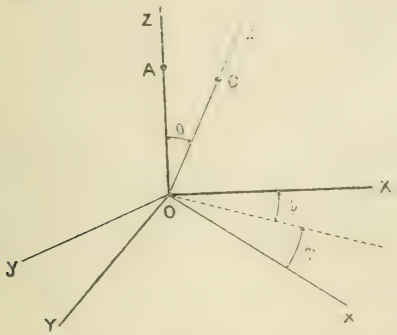
Cela posé, on demande :

1° *De déterminer les moments d'inertie du cône relativement à son sommet;*

2° *D'étudier toutes les circonstances du mouvement de ce cône;*

3° *D'indiquer les cas particuliers où l'on peut intégrer les équations du mouvement au moyen des fonctions élémentaires;*

4° *D'indiquer quelles devraient être les données initiales pour que l'axe du cône décrive rigoureusement un cône de révolution autour de* OA.



On déterminera la position du solide par les angles d'Euler θ, ψ, *qui fixent relativement à un trièdre invariable* OXYZ *la position du trièdre mobile* $Oxyz$ *lié au cône;* Oz *étant l'axe du cône,* Ox *et* Oy *deux axes perpendiculaires situés dans le plan de l'équateur. On donne le rayon de base* R *et la hauteur* H *du cône, sa densité* ρ, *la distance* $OA = a$, *la distance* $OG = b$ *du centre de gravité au sommet, les valeurs initiales* θ_0, φ_0, ψ_0, θ'_0, φ'_0, ψ'_0.

Examiner le cas où $R = 2H$.

Épreuve pratique. — *Dans un pendule sphérique de longueur* un *mètre, la position initiale du point pesant est sur un parallèle situé au-dessous et à une distance* $\frac{\sqrt{3}}{2}$ *mètre du centre. La vitesse initiale est dirigée suivant la tangente au parallèle et égale à* 20^m *par seconde.*

On demande de déterminer les parallèles limitant la trajectoire de l'extrémité du pendule; $g = 9^{m},81$.

(Juillet 1907.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On donne dans un plan horizontal deux masses m, m' reliées par un fil de longueur constante qui peut glisser librement dans un anneau fixé en* O.

On communique aux masses m et m' des vitesses initiales quelconques dans le plan mOm' et l'on demande d'étudier le mouvement du système.

1° *Établir les formules qui définissent les trajectoires des deux points;*

2° *Indiquer des cas dans lesquels les intégrations peuvent s'effectuer par les fonctions élémentaires;*

3° *Calculer la tension du fil;*

4° *Discuter complètement le problème dans le cas où l'une seulement des deux masses reçoit une impulsion initiale, l'autre masse étant primitivement au repos.*

On fera abstraction des frottements ainsi que de la masse du fil; on le suppose parfaitement flexible et inextensible.

(Novembre 1907.)

CERTIFICATS D'ASTRONOMIE.

Besançon.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Établir les formules usuelles de la précession et de la nutation. Exposé succinct de la formation des éphémérides d'étoiles.*

II. *Mouvement parabolique. Théorème d'Euler. Principe de la méthode d'Olbers.*

(Juin 1906.)

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Démontrer que, dans le mouvement d'un point matériel attiré par un centre fixe suivant*

la loi de Newton, l'hodographe est une circonférence; déduire de ce théorème les intégrales de Laplace.

Cas particulier où la trajectoire est une circonférence : quelle propriété de l'hodographe caractérise ce cas? Quelle relation existe-t-il alors entre les coordonnées du point matériel et les projections de sa vitesse à un instant quelconque? Comment détermine-t-on, toujours dans le cas particulier, les éléments de l'orbite circulaire lorsqu'on connaît la position et la vitesse initiales du point matériel?

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'heure sidérale du coucher du Soleil à Bordeaux, le 26 juin 1907, par la méthode des approximations successives.*

Données :

♃ à midi vrai.....		$6^h 16^m 13^s, 4$
☉ —		$23° 23' 52'', 4$
Latitude de Bordeaux.....		$44° 50' 7''$
Variations horaires	en ♃...	$+ 10^s, 38$
	en ☉...	$- 4'', 3$

(Juillet 1907.)

I. ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Les deux sens usuels du mot* parallaxe :

1° *Parallaxe diurne : corrections à faire subir à l'ascension droite et à la déclinaison d'une planète observée en un lieu donné pour obtenir les coordonnées géocentriques.*

2° *Parallaxe annuelle d'une étoile : l'étoile paraît, dans le cours d'une année, décrire une ellipse autour de sa position moyenne.*

II. ÉPREUVE PRATIQUE. — *L'excentricité de l'orbite d'une planète étant 0,04825, calculer l'anomalie excentrique correspondant à une anomalie moyenne de 60°, en procédant par approximations successives.*

Indiquer l'approximation du résultat.

Calculer ensuite l'anomalie vraie pour la même époque. (Novembre 1907.)

Grenoble.

Composition. — *Application de la méthode des moindres carrés au rattachement d'un signal inaccessible aux sommets d'un triangle non préalablement compensé.*

Cas particulier où le triangle aurait été préalablement compensé.

Épreuve pratique. — *Passage des coordonnées héliocentriques d'un astre à ses coordonnées géocentriques.*

Données :

$$l_h = 306^\circ 27' 22'',5, \qquad \odot = 119^\circ 6' 38'',23,$$
$$\lambda_h = -2^\circ 37' 43'',4, \qquad \lambda_\odot = 0'',60,$$
$$\log r_h = \bar{1},8622851. \qquad \log R = 0,0068791.$$

Calculer r_g, l_g, λ_g. (Juillet 1907.)

Composition. — *Prédiction et calcul des phases d'une éclipse de Lune.*

Épreuve pratique. — *Connaissant la durée* T *de la présence d'une étoile au-dessous de l'horizon d'un lieu* λ, *calculer :*

1° *La déclinaison* δ *de l'étoile;*

2° *L'azimut* A *de son lever;*

3° *Les variations* $\Delta\delta$ *et* ΔA *de* δ *et* A *qui correspondent à un accroissement* ε *de* T.

Application numérique :

$$T = 18^h 54^m 9^s,8 \quad \text{(sidérales)},$$
$$\lambda = 45^\circ 11' 22'',$$
$$\varepsilon = -1^\circ.$$

(Novembre 1907.)

Marseille.

Épreuve écrite. — *Principes de navigation.*

Cartes marines de Mercator : loi de l'écartement des parallèles.

Méthode de l'estime : loch, boussole.

Méthode du point calculé : description et théorie du sextant.

Changement de date au méridien antipode.

(Juillet 1907.)

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Connaissant les angles* A, B, C *d'un triangle sphérique, tracé sur une sphère de rayon* R, *calculer les longueurs des côtés a, b, c du triangle.*

Données numériques :

$$A = 85^{\circ}.52'.10'',02,$$
$$B = 62.11.48,72,$$
$$C = 73.\ 6.43,80.$$
$$R = 10^{m}.$$

(Juillet 1907.)

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On considère trois axes rectangulaires* Sxyz *passant par le Soleil,* Sxy *étant le plan de l'écliptique et* Sx *passant par le point vernal.*

Soient x, y, z *les coordonnées cartésiennes d'une planète* P, r *le rayon vecteur* SP, θ *la longitude du nœud,* i *l'angle du plan de l'orbite avec le plan de l'écliptique,* L *la distance angulaire de la planète au nœud, en supposant toujours l'observateur en* S.

Montrer d'abord que $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ *sont des cosinus que la Trigonométrie sphérique permet facilement d'exprimer en fonction de* θ, i, L.

Soient g *la distance angulaire du périhélie au nœud,* v *l'anomalie vraie* ($L = v - g$).

Transformer les expressions trouvées précédemment pour x, y, z, *en d'autres donnant ces coordonnées en fonction de* g, θ, i, $r\cos v$, $r\sin v$, *puis, en exprimant* $r\cos v$, $r\sin v$ *à l'aide de* a, e, u, *donner finalement* x y, z *en fonction des éléments de l'orbite,* a, e, i, g, θ, *et de* u, *seule quantité dépendant du temps.*

Il est clair qu'on ne peut donner des expressions explicites de x, y, z *en fonction du temps, puisque* u *est lié au*

temps par l'équation de Képler, qui ne peut se résoudre en termes finis. Mais ne pourrait-on concevoir tout au moins la possibilité de donner x, y, z en fonction du temps à l'aide de certaines séries?

Épreuve pratique. — *Calculer la masse de Jupiter en partant des données suivantes :*

Masse	du Soleil	1
	de la Terre	$\frac{1}{324439}$
Demi-grand axe	de l'orbite terrestre	1
	de l'orbite de Jupiter	5,203
Durée de la révolution sidérale	de la Terre	$365^j,256$
	de Jupiter	4332,589

Dans ce calcul, étant donnée l'approximation peu satisfaisante fournie dans de telles questions par les logarithmes à cinq décimales, les données n'ont-elles pas plus de précision que n'en comporte le résultat? Aurait-on modifié celui-ci en négligeant la masse de la Terre?

(Juillet 1907.)

Nancy.

Épreuve écrite. — I. *En supposant la Terre sphérique, trouver les conditions de possibilité d'une éclipse de Lune aux environs d'une opposition donnée. Calculer les circonstances du phénomène.*

II. *On considère l'ellipsoïde terrestre et trois axes de coordonnées rectangulaires ayant leur origine au centre* O : Oz *dirigé suivant l'axe de rotation et vers le pôle nord;* Ox *situé dans le demi-plan du méridien de Paris;* Oy *dirigé à l'est de ce méridien.*

1° *Calculer les coordonnées x, y, z d'un lieu terrestre* M *défini par sa longitude l et par sa latitude φ.*

2° *Trouver la relation entre l et φ qui définit le lieu géométrique des points* M *pour lesquels un certain astre se lève ou se couche au moment où cet astre passe au méridien supérieur de Nancy, sachant qu'à ce moment la distance géocentrique de l'astre est r et sa déclinaison* D.

3° *Distinguer, sur ce lieu géocentrique, les points qui répondent au lever et ceux qui répondent au coucher.*

N. B. — *On désignera par* α *la longitude de Nancy, par* $2a$ *et* e *le grand axe et l'excentricité de l'ellipse méridienne.* (Juin 1907.)

Toulouse.

Épreuve écrite. — I. *Établir la relation dite* équation de Képler $u - e \sin u = M$, *et exposer le mode de résolution de cette équation dû à Gauss.*

II. 1° *a et b désignant les demi-longueurs des axes de l'ellipse méridienne du sphéroïde terrestre et* $\alpha = \frac{a-b}{a}$ *l'aplatissement, démontrer que la latitude géographique* φ' *et la latitude géocentrique* φ *d'un lieu* L *sont liées par la formule*

$$\operatorname{tang}\varphi = (1-\alpha)^2 \operatorname{tang}\varphi'.$$

2° *Appelant* ω *l'angle de la verticale du lieu* L *avec le prolongement du rayon du sphéroïde aboutissant en ce lieu, faire voir que l'on a*

$$\omega = \alpha \sin \varphi',$$

ω *étant supposé assez petit pour pouvoir être confondu avec sa tangente et les puissances de* α *supérieures à la première étant négligées.*

3° *Dans l'observation méridienne d'un astre situé à la distance* Δ *du centre de la Terre, la lecture du cercle et celle du nadir font connaître l'angle* ζ *forme par le rayon visuel à l'astre et la verticale du lieu* L. *Dire les corrections qu'il faudra faire subir à ce nombre* ζ *pour rendre l'observation de ce nombre indépendante du lieu* L *et par suite comparable à des mesures analogues faites ailleurs.*

Épreuve pratique. — α *Baleine a pour coordonnées équa-*

toriales

$$\alpha = 2^h 57^m 25^s \quad \text{ascension droite,}$$
$$\delta = 3^\circ 43' 31'' \quad \text{déclinaison.}$$

1° *Calculer l'heure de son lever à l'Observatoire de Toulouse en temps sidéral.*

2° *Calculer l'heure de son lever en tenant compte de la réfraction.*

Latitude φ *de l'Observatoire de Toulouse :* $43^\circ 36' 45''$.

Réfraction à l'horizon : $35'$. (Juillet 1907.)

Épreuve écrite. — I. *Exposer la construction d'une éphéméride donnant les coordonnées équatoriales géocentriques d'une planète et définir ce qu'on appelle les* constantes de Gauss.

II. *On considère deux dates t et t' et l'on suppose que dans l'intervalle de temps t' — t le système solaire se soit déplacé de la quantité* Δ *dans une direction d'ascension droite a et de distance polaire p.*

On demande les accroissements $\delta\alpha$ *et* $\delta\pi$ *que prennent, par suite de ce déplacement, l'ascension droite* α *et la distance polaire* π, *à la date t, d'une étoile située à la distance d du Soleil.*

On fera abstraction, bien entendu, de toute cause de variation des coordonnées de l'étoile durant le temps t'—t autre que la cause envisagée ici et l'on négligera le carré du rapport $\frac{\Delta}{\delta}$.

Épreuve pratique. — *Sous quel angle i, à quelle distance zénithale z et à quelle heure sidérale* θ *l'étoile* α *Bélier*

d'ascension droite..... $2^h 1^m 56^s$
et de déclinaison nord..... $23^\circ 1' 23''$

traverse-t-elle le premier vertical, après son passage au méridien, à Toulouse?

Latitude de Toulouse..... $43^\circ 36' 45''$

On nomme premier vertical *le vertical d'azimut* 90°.

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Les coordonnées de chaque point d'une surface ont pour expression*

$$x = a - R\cos u, \qquad y = b - R\sin u, \qquad z = v,$$

u, v étant deux paramètres indépendants, a, b, R trois fonctions données de v.

1° *Donner la définition géométrique de cette surface et trouver le lieu des normales dont le pied décrit une génératrice donnée $v = \text{const}$.*

2° *Former l'équation différentielle des trajectoires sous l'angle i des courbes $v = \text{const}$. Cas particulier des trajectoires orthogonales. Interpréter géométriquement, dans ce cas particulier, l'équation trouvée.*

3° *Former l'équation différentielle des lignes asymptotiques et déterminer les fonctions a, b, R par la condition que la surface soit minima. On déterminera par des quadratures, dans le cas général, le lieu du centre de la génératrice circulaire et la loi de variation de son rayon; ces quadratures pourront être effectuées à l'aide de fonctions simplement périodiques lorsque la surface sera de révolution et dans ce cas seulement. Achever le calcul dans ce cas particulier.* (Juillet 1907.)

Nancy.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *On considère la surface (S) définie par les équations*

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = \alpha v + U,$$

dans lesquelles x, y, z désignent les coordonnées rectangulaires d'un point de la surface, u et v deux paramètres indépendants, α une constante donnée et U une fonction de u.

1° *Indiquer une génération simple de cette surface* (S) *et établir l'équation différentielle de ses lignes asymptotiques.*

2° *Déterminer la fonction* U *de manière que l'une des familles de lignes asymptotiques de* (S) *soit formée par les trajectoires orthogonales des courbes* $u = \text{const.}$; *déterminer, dans ce cas, la nature de ces trajectoires.*

3° *La fonction* U *étant choisie de manière à satisfaire à la condition précédente, démontrer que, parmi toutes les surfaces de révolution applicables sur la surface* (S), *se trouve une caténoïde* (Σ). *Indiquer les formules qui réalisent l'application de* (S) *sur* (Σ).

4° *La fonction* U *étant toujours choisie de la même façon, déterminer la courbure totale de la surface* (S).

Épreuve pratique. — *Lignes de courbure de la surface représentée en coordonnées rectangulaires par les équations*

$$x = \frac{1}{3}u^3 - uv^2 + \frac{u}{u^2 + v^2},$$

$$y = u^2 v - \frac{1}{3}v^2 + \frac{v}{u^2 + v^2},$$

$$z = 2u.$$

Solution.

1° La surface est un hélicoïde ; l'équation différentielle de ses lignes asymptotiques est

$$u\,\mathrm{U}''\,du^2 - 2\alpha\,du\,dv + u^2\,\mathrm{U}'\,dv^2 = 0.$$

2° Les trajectoires orthogonales des courbes $u = \text{const.}$ sont définies par

$$\alpha\,\mathrm{U}'\,du + (u^2 + \alpha^2)\,dv = 0;$$

pour qu'elles soient asymptotiques, il faut que U satisfasse à une équation dont l'intégrale est

$$\mathrm{U} = \frac{\sqrt{k^2 u^2 = \alpha^2)}}{k^2} - \alpha \arcsin \frac{\alpha}{ku} + \mathrm{C},$$

k et C étant des constantes; les asymptotiques sont alors des droites faisant partie du complexe linéaire défini par le mouvement hélicoïdal qui engendre la surface.

3° L'expression de ds^2,

$$ds^2 = (u^2 - \alpha^2)\left(dv + \frac{\alpha\, du}{u\sqrt{k^2 u^2 - \alpha^2}}\right)^2 + \frac{(1 + k^2)u^2\, du^2}{k^2 u^2 - \alpha^2},$$

donne pour les surfaces de révolution applicables sur (S) les formules

$$r^2 = m^2(u^2 + \alpha^2), \qquad \theta = \frac{1}{m}\left(v - \arcsin\frac{\alpha}{ku}\right),$$

$$X = r\cos\theta, \qquad Y = r\sin\theta,$$

$$Z = \int\sqrt{\frac{(1 + k^2 - k^2 m^2)r^2 - (1 + k^2)m^4\alpha^2}{k^2 m^2 r^2 - (1 + k^2)m^4\alpha^2}}\, dr,$$

où m est une constante; en posant $m^2 = \frac{1 - k^2}{k^2}$, la relation entre Z et r conduit à

$$r = \frac{(1 - k^2)\alpha}{k^2}\operatorname{ch}\frac{k^2 Z}{(1 - k^2)\alpha},$$

ce qui définit une caténoïde.

4° La courbure totale est la même que pour la caténoïde :

$$-\frac{(1 - k^2)\alpha^2}{k^4 r^4} = -\frac{\alpha^2}{(u^2 + \alpha^2)^2}.$$

Épreuve pratique. — Les lignes de courbure sont données par

$$v\, du^2 - 2u\, du\, dv - v\, dv^2 = 0$$

et sont

$$v^2 - 2cu - c^2 = 0.$$

(Juin 1906.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1765.

(1897, p. 243.)

On coupe, par un plan arbitraire, un ellipsoïde donné, et l'on prend la circonférence lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'ellipse d'intersection. Lorsqu'on fait varier le plan, on obtient des circonférences qui n'occupent qu'une région déterminée de l'espace; on demande quelle est la surface qui limite cette région?

(MANNHEIM.)

SOLUTION

Par M. R. B.

Rappelons d'abord un fait relatif au déplacement d'une figure de grandeur invariable assujettie à deux conditions seulement. Supposons que ces conditions soient telles que deux points de la figure soient astreints à rester chacun sur une surface. Le déplacement d'un troisième point sera en général indéterminé, et il n'y a qu'un cas d'exception : c'est celui *où les deux points sont tels que les normales à leurs surfaces trajectoires se rencontrent.* Soient, en effet, O leur point de rencontre et (P) leur plan. Quel que soit le déplacement infiniment petit de la figure, satisfaisant aux conditions imposées, le point O sera le foyer du plan (P), dans le système focal attaché à ce déplacement. Tout point M du plan (P) aura donc un déplacement normal à la droite OM; autrement dit, quel que soit ce déplacement, le point M se trouve astreint à rester sur un élément de surface normal à la droite OM.

Cela posé, la question 1765 revient manifestement à la suivante : *On considère tous les angles droits dont les côtés sont tangents à l'ellipsoïde; les sommets de ces angles ne peuvent sortir d'une certaine région de l'espace. Quelle est la surface qui limite cette région?* Soit AMB l'angle

droit considéré dans une de ses positions limites. Pour tous les déplacements, en nombre quadruplement infini, qu'on peut lui donner, le point M doit rester sur un même élément de surface. Remarquons, en outre, que pour tous ces déplacements les points de contact A et B des côtés de l'angle avec l'ellipsoïde décrivent aussi des éléments de surfaces. Donc, d'après ce qui a été rappelé plus haut, il faut : 1° que les normales en A et B à l'ellipsoïde soient dans un même plan; 2° que le point M soit dans ce plan.

En d'autres termes, on est ramené au problème suivant : *Quel est le lieu du sommet d'un angle droit dont les deux côtés sont tangents à un ellipsoïde, le plan de l'angle droit étant de plus normal à la surface au point de contact de chacun des côtés de l'angle?* Or ce lieu est connu : c'est une *surface de l'onde*, comme Mannheim l'a démontré (*voir* les *Principes et développements de Géométrie cinématique* du regretté géomètre, p. 528). Telle est la réponse à la question proposée.

2043.

(1905, p. 81.)

Le limaçon de Pascal, qui a pour équation en coordonnées polaires

$$\rho = 2 + \cos\omega,$$

est tel qu'il existe une infinité d'hexagones qui lui sont à la fois inscrits et circonscrits. R. B.

SOLUTION

Par l'Auteur.

Considérons, en général, une courbe de quatrième ordre C, ayant un point double à tangentes séparées et deux points de rebroussement. Une telle courbe est unicursale et de quatrième classe, d'après les formules de Plücker. On peut donc mener à C, d'un point m pris sur cette courbe, deux tangentes autres que la tangente en m. Chacune de ces tangentes rencontre C en un point différent du point m et du point de contact. On voit ainsi que si deux points m et n varient sur C de telle

manière que la droite mn soit tangente à la courbe, à une position donnée pour le point m correspondent deux positions pour le point n et réciproquement. Autrement dit, il existe entre les deux points m et n une correspondance (2, 2). Cette correspondance est d'ailleurs évidemment symétrique.

Cela posé, je rappellerai la propriété suivante : soit C une courbe unicursale et appelons (γ) une correspondance (2, 2) symétrique établie entre deux points variant simultanément sur C. Étant donné un point m_1 quelconque sur C, appelons m_2 l'un des deux points de la courbe que (γ) fait correspondre à m_1; au point m_2 (γ) fait correspondre m_1 et un autre point m_3; de même au point m_3 (γ) fait correspondre m_2 et un autre point m_4, et ainsi de suite. Nous obtenons ainsi successivement les points $m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n$. S'il arrive que pour une certaine position du point m_1 le point m_{n+1} coïncide avec lui, cette même circonstance se présentera, quel que soit le point m_1 de C. Cette propriété, dans le cas où C est une conique, n'est autre que le célèbre théorème de Poncelet sur les polygones inscrits et circonscrits à deux coniques, et l'extension au cas où C est une courbe unicursale quelconque est immédiate.

Il suffit de rapprocher ce résultat de ce qui a été dit au commencement pour formuler l'énoncé suivant :

Soit C *une courbe de quatrième ordre et de quatrième classe : s'il existe un polygone de n côtés inscrit et circonscrit à* C, *il existe une infinité de tels polygones.*

Le limaçon de Pascal est une courbe du quatrième ordre possédant un point double à tangentes en général séparées et deux points de rebroussement aux points cycliques. On peut donc lui appliquer le théorème qui précède et, pour résoudre la question proposée, il suffit d'établir qu'il existe un hexagone inscrit et circonscrit au limaçon particulier ayant pour équation

$$C = 2 + \cos\omega.$$

Or, ce limaçon, on le voit tout de suite, est tel que les tangentes à son point double font entre elles un angle de 120°. Soient OM et OM′ ces tangentes, M et M′ les points où elles rencontrent de nouveau le limaçon. Les considérations les plus simples font reconnaître que la droite MM′ est

tangente au limaçon en l'un de ses sommets A, et l'on a en OMM'OM'M un hexagone dégénéré inscrit et circonscrit à la courbe.

La proposition est donc établie.

Remarque. — Soient 123456 l'un quelconque des hexagones que l'on peut inscrire et circonscrire à la courbe. Quand l'hexagone varie, les sommets opposés 1 et 4, 2 et 5, 3 et 6 sont conjugués dans une involution, car la correspondance qui existe entre eux est évidemment univoque et réciproque. M et M', O et O' sont deux couples de points conjugués dans cette involution, qui par suite se confond nécessairement avec celle qui fait se correspondre les points de la courbe symétriques par rapport à l'axe. On voit donc que :

Les sommets opposés de l'un quelconque des hexagones 123456 *inscrits et circonscrits au limaçon sont deux à deux symétriques par rapport à l'axe de cette courbe.*

2060.

(1907, p. 94.)

Les angles d'un pentagone gauche ont chacun deux bissectrices, l'une intérieure, l'autre extérieure. Cinq bissectrices issues de sommets différents appartiennent à une même congruence linéaire, si les bissectrices extérieures sont en nombre pair. (R. B.)

2061.

(1907, p. 95.)

Au lieu du pentagone de l'énoncé précédent, considérons un hexagone. Six bissectrices issues de sommets différents appartiennent à un même complexe linéaire, si les bissectrices extérieures (ou intérieures) sont en nombre pair.

(Comparer à ces deux questions la question 2051, 1906, p. 480.) (R. B.)

SOLUTION

Par M. Thié.

On peut avoir recours ici aux considérations dont nous avons fait usage pour traiter la question 2051 (1907, p. 238).

Appliquons à chaque sommet du pentagone (ou de l'hexagone) considéré deux forces dirigées respectivement suivant les deux côtés qui aboutissent à ce sommet; supposons de plus que les intensités de toutes les forces ainsi introduites soient égales, et que les forces appliquées à deux sommets consécutifs soient opposées. Le système de forces ainsi constitué est en équilibre. Les deux forces appliquées en un sommet ont leur résultante dirigée suivant l'une des bissectrices de l'angle correspondant du polygone, et le nombre des bissectrices extérieures est pair, comme on le voit aisément. On en conclut que cinq (ou six) bissectrices issues de sommets différents sont les lignes d'action de forces en équilibre, si le nombre des bissectrices extérieures est pair. Donc, en vertu de théorèmes connus, ces bissectrices appartiennent, suivant le cas, à une congruence linéaire ou à un complexe linéaire.

2066.

(1907, p. 96.)

Intégrer l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = py^3 + qy^2 + ry + s,$$

où p, q, r, s sont des fonctions de x, sachant que cette équation admet l'intégrale particulière $\beta = -\frac{q}{3p}$.

(Dr W. Kapteyn.)

PREMIÈRE SOLUTION

Par M. Parrod.

En posant

$$y = \beta + e^z,$$

on obtient une équation différentielle de la forme

$$\frac{dz}{dx} = pe^{2z} + A$$

où A est une fonction de x.

Soit

$$z = u - \int A\,dx,$$

$$\frac{du}{dx} = p\,e^{2u}\,e^{2\int A\,dx}.$$

Intégrons, il vient

$$e^{-2u} = -2\int p\,e^{2\int A\,dx}\,dx;$$

$\int A\,dx$ est une fonction primitive particulière de A.

DEUXIÈME SOLUTION

Par M. Amblard.

Posons

$$y = y_1 + \beta;$$

l'équation proposée devient

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{d\beta}{dx} = py_1^3 + 3y_1^2\beta p + 3p\beta^2 y_1$$
$$+ qy_1^2 + 2qy_1\beta + ry_1 + p\beta^3 + q\beta^2 + r\beta + s.$$

et, puisque β est une solution,

$$\frac{dy_1}{dx} = py_1^3 + (3\beta p + q)y_1^2 + (3p\beta^2 + 2q\beta + r)y_1.$$

ou, en tenant compte de la valeur de β,

$$\frac{dy_1}{dx} = py_1^3 + \left(r - \frac{q^2}{3p}\right)y_1;$$

l'équation est ainsi ramenée à une équation de Bernoulli: cette équation s'écrit

$$\frac{1}{y_1^3}\frac{dy_1}{dz} = p + \left(r - \frac{q^2}{3p}\right)\frac{1}{y_1^2}$$

et, en posant $\frac{1}{y_1^2} = z$, elle devient

$$-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} = \left(r - \frac{q^2}{3p}\right)z + p.$$

nous avons ainsi une équation linéaire qui s'intégrera par les méthodes connues.

Autres solutions de MM. LETIERCE et J. ROSE.

2069.

(1907, p. 96.)

Déterminer les lignes asymptotiques de la surface lieu du milieu des cordes de la courbe gauche

$$x = t^n, \qquad y = t^{n-1}, \qquad z = t^{n-2}.$$

(Dr J. DE VRIES.)

SOLUTION

Par M. J. ROSE.

La surface lieu du milieu des cordes de cette courbe est, en coordonnées curvilignes, définie par les équations

$$x = \tfrac{1}{2}(u^n + v^n), \quad y = \tfrac{1}{2}(u^{n-1} + v^{n-1}), \quad z = \tfrac{1}{2}(u^{n-2} + v^{n-2}).$$

L'équation générale des asymptotiques est de la forme

$$D\,du^2 - 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = 0.$$

La surface proposée étant une surface de translation $D' = 0$. Quant à D' et D'', ils ont respectivement pour valeurs

$$D = \begin{vmatrix} \frac{n(n-1)}{2}u^{n-2} & \frac{(n-1)(n-2)}{2}u^{n-3} & \frac{(n-2)(n-3)}{2}u^{n-4} \\ \frac{n}{2}u^{n-1} & \frac{n-1}{2}u^{n-2} & \frac{n-2}{2}u^{n-3} \\ \frac{n}{2}v^{n-1} & \frac{n-1}{2}v^{n-2} & \frac{n-2}{2}v^{n-3} \end{vmatrix}$$

ou

$$D = \frac{n(n-1)(n-2)}{8}u^{n-4}u^{n-3}v^{n-3}u(u-v)^2.$$

De même

$$D'' = -\frac{n(n-1)(n-2)}{8}v^{n-4}u^{n-3}v^{n-3}v(u-v)^2.$$

L'équation différentielle des asymptotiques est donc

$$u^{n-3}du^2 - v^{n-3}dv^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \left(u^{\frac{n-3}{2}}du \pm v^{\frac{n-3}{2}}dv\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$u^{\frac{n-1}{2}} \pm v^{\frac{n-1}{2}} = \text{const.}$$

2075.

1907, p. 240.

Si, sur chaque ordonnée de la courbe (M) *rapportée à des axes rectangulaires, on porte le segment* MP *égal à la longueur* MN *de la normale limitée à* Ox, *et si la normale correspondant à la développée de* (M) *coupe en* H *la perpendiculaire élevée en* N *à* Ox, *la tangente à la courbe* (P) *passe par le point de rencontre de la tangente à la courbe* (M) *et de la perpendiculaire abaissée de* N *sur* MH.

(M. d'Ocagne.)

SOLUTION

Par M. F. Boulad.

Appelons C le centre de courbure répondant au point M, et I le point de rencontre des tangentes en M et P. Soient $\widehat{M}$ et $\widehat{P}$ les angles que font respectivement ces deux tangentes avec le segment MP. En vertu de la formule connue

$$d.AB = d(A)\cos\widehat{A} - d(B)\cos\widehat{B}$$

de la différentielle d'un segment AB intercepté par deux courbes sur la tangente à une troisième courbe, nous avons les deux relations

$$d.MP = d(M)\cos\widehat{M} - d(P)\cos\widehat{P},$$

$$d.MN = -d(N)\cos(\widehat{MNx} \text{ ou } \widehat{NHC}).$$

D'autre part, la formule de Newton (*Traité de Géométrie*

infinitésimale de M. d'Ocagne, p. 260) donne

$$\frac{d(P)}{d(M)} = \frac{IP}{MI}, \qquad \frac{d(N)}{d(M)} = \frac{NH}{MC}.$$

En introduisant les valeurs de $d(P)$ et $d(N)$ dans les deux relations ci-dessus, et en égalant les membres de ces dernières en raison de ce que $MP = MN$, on déduit, après suppression du facteur commun $d(M)$,

$$\cos\widehat{M} - \frac{PI}{MI}\cos\widehat{P} = -\frac{NH}{MC}\cos\left(\widehat{NHC}\right).$$

Mais, comme on a

$$MI\cos\widehat{M} - PI\cos\widehat{P} = -MP, \qquad NH\cos\left(\widehat{NHC}\right) = HC,$$

il vient

$$\frac{MP \text{ ou } MN}{MI} = \frac{HC}{MC}$$

qui montre que les deux triangles rectangles NMI et HCM sont semblables.

Par suite, NI *est perpendiculaire à* MH. C. Q. F. D.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

(TOME VII, 4e SÉRIE).

La classification adoptée est celle de l'Index du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.

A. — **Algèbre élémentaire; théorie des équations algébriques et transcendantes; groupes de Galois; fractions rationnelles; interpolation.**

Pages.

A1a Sur un certain domaine holoïde, complet et bien défini; par M. *Leon Autonne*..... 49

A1a Sur la divisibilité des polynomes entiers à plusieurs variables; par M. *Ch. Méray*..... 193

B. — **Déterminants; substitutions linéaires; élimination; théorie algébrique des formes; invariants et covariants; quaternions; équipollences et quantités complexes.**

B2a Sur les rapports anharmoniques généralisés; par M. *Georges Remoundos*..... 77

D. — **Théorie générale des fonctions et son application aux fonctions algébriques et circulaires; séries et développements infinis, comprenant en particulier les produits infinis et les fractions continues considérées au point de vue algébrique; nombres de Bernoulli; fonctions sphériques et analogues.**

D2e Sur la réduction en fraction continue canonique de la fonction $e^{x^2}\int_x^\infty e^{-z^2}\,dz$; par M. *H. Padé*..... 149

Pages.

D3a Sur le calcul d'une fonction analytique dont on connaît la partie réelle; par M. *R. Alezais*.. 337

F. — Fonctions elliptiques avec leurs applications.

F2d Décomposition en éléments simples de la fonction doublement périodique de seconde espèce ayant un infini d'ordre *n*. Formation des coefficients; par M. *E. Mathy*.... 263

H. — Équations différentielles et aux différences partielles; équations fonctionnelles; équations aux différences finies; suites récurrentes.

H12d Sur les propriétés d'addition d'une suite récurrente considérée par D. Bernoulli; par M. *Amsler*..... 297

I. — Arithmétique et théorie des nombres; analyse indéterminée; théorie arithmétique des formes et des fractions continues; division du cercle; nombres complexes, idéaux, transcendants.

I20a Sur la composition des formes quadratiques; par M. *T. Lalesco*..... 145

J. — Analyse combinatoire; calcul des probabilités; calcul des variations; théorie générale des groupes de transformations; théorie des ensembles de M. Cantor.

J2c Sur le problème du scrutin; par M. *G. Dumas*. 545

K. — Géométrie et Trigonométrie élémentaires (étude des figures formées de droites, plans, cercles et sphères); géométrie du point, de la droite, du plan, du cercle et de la sphère; géométrie descriptive; perspective.

K2e Sur la sphère pédale et le cercle pédal; par M. *A. Pellet*..... 155

K2e Sur le théorème de Feuerbach; par M. *G. Fontené*..... 158

K10c Étude sur le calcul de π par des formules dérivées de la théorie des périmètres et des rayons; par M. *G. Hilleret*..... 481

Pages.

K11e, K12b α Sur le problème d'Apollonius et sur quelques propriétés des cycles; par M. *R. Bricard*. 491

K13a Démonstration d'un théorème attribué à Leibniz; par M. *A. Hilaire*.... 151

K13a Note sur l'article précédent; par M. *R. B*... 153

K21d Sur la rectification approchée des arcs de cercle; par M. *d'Ocagne*..... 1

L. — Coniques et surfaces du second degré.

$L^2$17d Quasi-développées des surfaces du second degré; par M. *D. Tabacoff*..... 130

M. — Courbes et surfaces algébriques; courbes et surfaces transcendantes spéciales.

$M^2$1b Sur les formules de Salmon analogues aux formules de Plücker; par M. *G. Fontené* 433

$M^2$4e Sur une surface remarquable du quatrième ordre; par M. *Lucien Godeaux*..... 255

$M^2$4iδ Étude du tore rapporté aux cercles d'Yvon Villarceau; par M. *J. Haag*..... 116

$M^2$4m Sur deux surfaces du quatrième ordre liées à l'octuple gauche complet; par M. *L. Remy*.. 6

$M^2$9e Sur une surface du quatrième ordre; par M. *Lucien Godeaux*..... 460

$M^3$6a Sur une classe de quartiques gauches unicursales; par M. *Ch. Michel*..... 289

N. — Complexes et congruences; connexes; systèmes de courbes et de surfaces; géométrie énumérative.

$N^1$1k Sur un théorème de M. Picard; par M. *Ch. Michel*..... 539

O. — Géométrie infinitésimale et géométrie cinématique; applications géométriques du Calcul différentiel et du Calcul intégral à la théorie des courbes et des surfaces; quadrature et rectification; courbure; lignes asymptotiques, géodésiques, lignes de courbure; aires; volumes; surfaces minima; systèmes orthogonaux.

O4g Sur un théorème relatif à la déformation des surfaces gauches; par M. *Charrasse*..... 543

O5m Sur un réseau particulier de courbes ordinaires; par M. *J. Haag*. 453

Pages.

O6p Démonstration géométrique du théorème de Dupin relatif aux systèmes de trois surfaces qui se coupent orthogonalement; par M. *Fouché* 241

P. — Transformations géométriques; homographie; homologie et affinité; corrélation et polaires réciproques; inversion; transformations birationnelles et autres.

P1a Divisions homographiques sur une conique; par M. *A. Laureaux* 167

Q. — Géométrie, divers: géométrie à *n* dimensions; géométrie non euclidienne; *Analysis situs;* géométrie de situation.

Q2 Sur une extension à l'espace d'un théorème de Grossmann; par M. *Lucien Godeaux* 395

R. — Mécanique générale; cinématique; statique comprenant les centres de gravité et les moments d'inertie; dynamique; mécanique des solides; frottement; attraction des ellipsoïdes.

R1e Sur le système articulé de Hart; par M. *G. Fontené* 19

R1e Sur un système articulé; par M. *R. Bricard* .. 23

R4a Sur un problème de Mécanique; par M. *J. Juhel-Rénoy* 385

R4aδ Sur la solution d'une difficulté qui se présente dans l'étude de l'équilibre du treuil; par M. *A. de Saint-Germain* 111

R4d Les polygones corrélatifs des funiculaires et leurs applications; par M. *Farid Boulad* 304

R7b Sur les forces centrales multiformes; par M. *Georges Remoundos* 163

R8e A propos des équations de M. Appell; par M. *Emile Cotton* 529

T. Physique mathématique; élasticité; résistance des matériaux; capillarité; lumière; chaleur; électricité.

T5a Potentiel d'une couronne circulaire électrique de largeur infiniment mince et de densité superficielle égale à l'unité; par M. *E. Mathy*. 257

Pages.

X. — Procédés de calcul; tables; nomographie; calcul graphique; planimètres; instruments divers.

X4bγ Sur la résolution graphique des équations linéaires; par M. *Farid Boulad* 304

Certificats d'études supérieures des Facultés des Sciences.

Calcul différentiel et intégral..... 133, 176, 373, 523, 549
Analyse supérieure..... 38, 565
Géométrie supérieure..... 142
Mécanique rationnelle..... 28, 183, 405, 551
Astronomie..... 86, 558
Mathématiques générales..... 413, 519
Mécanique appliquée..... 143, 235
Mécanique céleste..... 236

Questions de concours.

Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1907 :
(Algèbre et Trigonométrie); solution par M. *Jean Servais*. 266
(Géométrie analytique et Mécanique); solution par M. *Philbert du Plessis* 270
Concours d'agrégation des Sciences mathématiques en 1907 :
(Énoncés des questions)..... 326
(Mathématiques spéciales); solution par M. *A. Vacquant*. 464
Concours d'admission à l'École Normale supérieure en 1907 :
(Première composition de Mathématiques); solution par M. *Jean Servais*..... 351
(Deuxième composition de Mathématiques); solution par M. *Jean Servais*..... 362

Correspondance.

M. M. d'Ocagne : Au sujet de la question 2064..... 173
M. G. F. : Au sujet d'une formule démontrée par M. Hilaire. 281
M. W. Gallatly (M.-A.) : Sur l'application des coordonnées trilinéaires au cercle des neuf points..... 492
M. G. Fontené : Au sujet d'une Note de M. Gallatly..... 507
M. E. Lacour : Au sujet de la construction de l'icosaèdre régulier..... 507

Bibliographie.

Pages.

EDWARD V. HUNTINGTON : La Kontinuo; compte rendu par M. *C. B*..... 174
P. CHARBONNIER : Balistique extérieure rationnelle (Problème balistique principal); compte rendu par M. *R. B*..... 277
P. CHARBONNIER : Balistique extérieure rationnelle (Problèmes balistiques secondaires); compte rendu par M. *R. B*..... 279
ALBERT PETOT : Étude dynamique des voitures automobiles; compte rendu par M. *C. B*..... 404
P. ROZÉ : Théorie et usage de la règle à calculs; compte rendu par M. *R. B*..... 474
CH. LUCAS DE PESLOUAN : N.-H. Abel, sa vie et son œuvre; compte rendu par M. *R. B*..... 475
RENÉ BAIRE : Leçons sur les théories générales de l'Analyse; compte rendu par M. *R. B*..... 508
M. D'OCAGNE : Calcul graphique et nomographie; compte rendu par M. *R. B*..... 512
ÉDOUARD-A. FOUËT : Leçons élémentaires sur les théories des fonctions analytiques; compte rendu par M. *R. B*..... 518
F. G.-M. : Exercices de Géométrie..... 518

Divers.

Un journal mathématique en esperanto..... 84
L'œuvre d'Amédée Mannheim; par M. *R. Bricard*..... 97
Association scientifique internationale espérantiste 170

Questions proposées.

2059 à 2071 94
2072 et 2073..... 144
2074..... 192
2075..... 240
2076 et 2077..... 288
2078 à 2080..... 335
2081 à 2083..... 480
2084 à 2086..... 528

Solutions de questions proposées.

1432, par M. *E. Malo*..... 419
1448, par M. *E. Malo*..... 420
1485, par M. *E. Malo*..... 420
1765, par M. *R. B*..... 568

Pages.
1888, par M. *Droz-Farny* 281
1891, par M. *Droz-Farny* 283
1898, par M. *Droz-Farny* 188
2028, par M. *Letierce* 189
2029, par M. *Mannheim* 40
2030, par M. *Letierce* 190
2036, par M. *Mannheim* 43
2040, par M. *Thié* 45
2041, par M. *P. Sondat* 48
2042, par M. *G. F* 91
2043, par M. *R. B* 569
2044, par M. *Letierce* 144
2046, par M. *Droz-Farny* 332
2047, par *un Abonné* 236
2048, par M. *Letierce* 333
2050, par M. *A. Guyau* 284
2051, par MM. *Parrod, Thié* 237
2052, par M. *A. Lambert* 239
2053, par M. *Letierce* 334
2054, par M. *Letierce* 381
2054, par MM. *Letierce, Klug* 381
2055, par M. *A. Laureaux* 431
2058, par M. *Sondat* 382
2059, par MM. *Parrod, W.-F. Egan* 285
2060, par M. *R. B* 571
2061, par M. *R. B* 571
2064 (Note) 476
2066, par MM. *Parrod, Amblard* 572
2068, par M. *V. Retali* 476
2069, par M. *J. Rose* 574
2071, par M. *E. Genty* 477
2072, par M. *Letierce* 478
2073, par MM. *Letierce, Kneis* 479
2075, par M. *F. Boulad* 575

Erratum 528

TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS ET DES NOMS CITÉS

(TOME VII, 4e SÉRIE).

Les noms des AUTEURS sont en PETITES CAPITALES.
Les noms *cités* sont en *italiques*.

ABONNÉ (UN), 237.
R. ALEZAIS, 337.
AMBLARD, 573.
AMIGUES, 543.
R. AMSLER, 95, 335.
R. Amsler, 297.
D. André, 546.
ANONYME (UN), 342.
APPELL, 112, 289, 529, 539.
L. AUTONNE, 49.

R. Baire, 508.
E.-N. BARISIEN, 40, 189, 191, 284.
E.-N. Barisien, 432.
Beltrami, 105.
Van den Berg, 305.
D. Bernoulli, 297.
J. Bertrand, 107.
BILLAU, 94, 285.
C. BLANC, 281.
F. BOULAD, 304, 311, 575.
C. BOURLET, 173, 405.
C. Bourlet, 171.
Bouvaist, 45, 158, 373.
R. BRICARD, 23, 43, 46, 92, 94, 95, 111, 153, 236, 237, 279, 280, 475, 480, 491, 512, 517, 518, 568, 569, 571.
R. Bricard, 8, 174.

CANON, 144, 334.
Cauchy, 158.
Cayley, 433.
E. CESARO, 420.
P. Charbonnier, 277, 279.
CHARRASSE, 543.
Chasles, 99.
Clebsch, 433.
Codazzi, 454.
E. COTTON, 529.
Czuber, 546.

Darboux, 102, 454, 544.
Dedekind, 146.
Dirichlet, 146.
A. DROZ-FARNY, 188, 282, 283, 333.
A. Droz-Farny, 190, 335, 480.
G. DUMAS, 546.
Dupin, 241.

W.-F. EGAN, 288.

Feuerbach, 158.
G. FONTENÉ, 48, 92, 158, 192, 239, 280, 288, 336, 433, 480, 507, 527, 528.

G. Fontené, 6, 19, 158.
FOUCHÉ, 241.
Fouché, 491.
E.-A. FOUËT, 518.

W. GALLATLY, 402.
W. Gallatly, 507.
Gauss, 146.
E. GENTY, 477.
Gergonne, 491.
L. GODEAUX, 255, 395, 460.
Grassmann, 395.
Greenhill, 102.
Guichard, 151.
A. GUYAU, 284.

J. HAAG, 115, 453.
Halphen, 104.
Hart, 19, 21.
A. HILAIRE, 151.
A. Hilaire, 153, 280.
G. HILLERET, 481.
G. Humbert, 146.
E.-V. Huntington, 170, 174.

Jacobi, 435.
E. de Jonquières, 452.
J. JUHEL-RENOY, 385.

W. KAPTEYN, 95, 96, 476, 572.
Kempe, 21.
KLUG, 382.
KNEIS, 479.
König, 49.

E. LACOUR, 507, 528.
Lagrange, 146.
Laguerre, 45, 249, 294, 390.
C.-A. LAISANT, 188.
T. LALESCO, 145.
A. LAMBERT, 239.
Laplace, 337.
Larmor, 27.
A. LAUREAUX, 167, 431.
A. Laureaux, 94, 238, 335, 382, 384.
Lecornu, 244.
Leibniz, 151.
C. Le Paige, 462.
LETIERCE, 144, 189, 191, 334, 381, 478, 479.
Letierce, 94, 238, 286, 432.
Lez, 432.
Ch. Lucas de Peslouan, 475.

V. Maës, 144, 480.
E. MALO, 420.
A. Maluski, 130.
MANNHEIM, 40, 43, 568.
Mannheim, 97, 162.
N. MANTEL, 96.
Massau, 305.
E. MATHY, 257, 263.
Mention, 159.
CH. MÉRAY, 193.
Meusnier, 103.
CH. MICHEL, 289, 539.
Ch. Michel, 45.

Neuberg, 396.
Nielsen, 249.

M. D'OCAGNE, 1, 173, 240, 575.
M. d'Ocagne, 305, 311, 476, 512.
Ostwald, 170.

H. PADÉ, 249.
PARROD, 237, 572.
Parrod, 94, 285, 480.
Pascal, 55.
A. PELLET, 155, 381, 431.
A. Petot, 404.
PHILBERT DU PLESSIS, 270.
E. Picard, 452, 539.
PLAKHOWO, 190.
Plücker, 192, 434.
Poincaré, 546.
Poncelet, 99.
Prym, 249.

G. REMOUNDOS, 77, 163.
L. REMY, 6.
Resal, 164.

RETALI, 476.
Ribaucour, 104.

ROGOFF, 333.
Rohn, 16.
J. ROSE, 574.
J. Rose, 144.
P. Rozé, 474.

A. DE SAINT-GERMAIN, 111.
Salmon, 433.
R. de Saussure, 172.
Schläfli, 47.
Schönemann, 100.
F. SCHUH, 96, 476.
H. Sebert, 171.
J. SERVAIS, 266, 351, 362.
G. Semard, 452.
SONDAT, 48, 332, 336, 383.
Sondat, 527.

D. TABACOFF, 130.
M. TÊTU, 480.
THIÉ, 46, 238, 571.

A. VACQUANT, 464.
R. LE VAVASSEUR, 288.
Viète, 491.
Y. Villarceau, 115.
G. de Vries, 462.
J. DE VRIES, 96, 144, 478, 479, 574.

Weingarten, 104.

ZEEMAN GZ., 96, 477.
Zeuthen, 452.

30317 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

QA
1
N8
v.66

Nouvelles annales
de mathématiques

Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

REINFORCED BINDING